

Fizika 2: priručnik

Robert Pezer

Docent

Sveučilište u Zagrebu Metalurški fakultet

Sadržaj

1 Uvod	7
2 Termalna fizika	13
2.1 Termometrija i toplina	13
2.1.1 Fiksne točke	14
2.1.2 Nulti zakon termodinamike	15
2.1.3 The Kelvin (apsolutna) skala temperatura	16
2.1.4 Celzijeva skala temperature	17
2.2 Termometri	17
2.2.1 Termometri s tekućinom	17
2.2.2 Termočlanci	18
2.2.3 Termootpori i termistori	18
2.2.4 Plinski termometar stalnog volumena	20
2.3 Kalorimetrija	21
2.3.1 Toplinski kapacitet	21
2.3.2 Latentna toplina	23
2.3.3 Eksperimentalno određivanje latentne topline	24
2.3.4 Eksperimentalno određivanje latentne topline isparavanja vode	25

2.4	Jednadžba stanja sistema	27
2.5	Zakoni sačuvanja	28
2.5.1	Unutrašnja energija	29
2.5.2	Prvi zakon termodinamike	33
2.5.3	Adijabatski izolirani sistem	35
2.5.4	Procesi u idealnom plinu	37
2.6	Drugi zakon termodinamike	46
2.6.1	Kvazistatični procesi	47
2.6.2	Ireverzibilnost	48
2.6.3	Statistička priroda termodinamike	49
2.6.4	Difuzija	56
2.6.5	Entropija	58
2.6.6	Entropija i toplina	63
2.7	Simulacije	67
2.7.1	Plinovi	67
2.7.2	Stanja tvari simulacija	67
2.8	Riješeni primjeri	70
2.8.1	Rad - primjeri	70
2.8.2	Ravnoteža	72
3	Osnove dinamike fluida	77
3.1	Termodinamičke veličine pri gibanju fluida	77
3.2	Tlak zemljine atmosfere	78
3.3	Jednadžba kontinuiteta	80
3.4	Impulsna jednadžba	81

3.5	Bernoullijeva jednađba	82
3.6	Gibanje u elastičnom mediju	84
3.7	Tlak i gibanje fluida	87
3.8	Riješeni primjeri	90
4	Elektricitet i magnetizam	95
4.1	Osnovni pojmovi	95
4.2	Vodiči i izolatori	96
4.3	Coulombov zakon	97
4.4	Električno polje	98
4.5	Električno polje i naboji	100
4.6	Rešeni primjeri	102
4.7	Gaussov zakon	106
4.7.1	Silnice električnog polja	106
4.7.2	Gaussov zakon	107
4.7.3	Električno polje sferne vodljive ljuske	108
4.7.4	Električno polje jednoliko nabijene ravne žice	110
4.7.5	Električno polje jednoliko nabijene ploče	111
4.7.6	Nabijeni vodiči	113
4.7.7	Riješeni primjeri	113
A	Praktična dopuna	117

A.1 Pregled osnovnih vještina u fizici	117
<i>Bibliografija</i>	121
<i>Indeks</i>	122

Poglavlje 1

Uvod

Ovaj priručnik s riješenim zadacima je smišljen da upotpuni i osvježi standardnu literaturu koja se koristi iz predmeta Fizika 2 na preddiplomskom studiju Metalurgije Metalurškog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Od studenata se očekuje da su svladali predmete matematika fizika i kemija na srednjoškolskoj razini te da razumiju gradivo koje predviđa predmet Fizika 1 (područje klasične Newtonove mehanike uključujući osciliranje i valne fenomene). Priručnik nije zamjena za literaturu i nema ambiciju nadomjestiti sustavno izlaganje koje se očekuje od udžbenika. On je plod iskustva autora u radu sa studentima i njihovim učestalim teškoćama s razumijevanjem koncepcija koje su presudne za uspješno svladavanje cjelina koje predviđa plan i program na tehničkom fakultetu. U suvremenom se svijetu od inženjera i znanstvenika tehničke struke očekuju iznimne kompetencije u smislu kvantitativnog promatranja prirodnih fenomena i njihove primjene u rješavanju inženjerskih problema. Ove činjenice čine matematiku i fiziku dominantnim fundamentalnim znanostima koje su osnova za razvoj suvremene tehnologije i znanosti Inženjerstvo, fizika i matematika kao cjelina je veliki izazov za studente. Na web portalu sveučilišta Princetone u opisu obaveznog predmeta fizike za inženjere piše:

"It might seem like engineering physics is someone's idea of a cruel joke — combining two of the toughest majors into one. But no pain, no gain, my friend! And gains in this field come in the form of a wide blanket of job opportunities and if you play your cards right a pretty nice looking starting salary. Engineering physics majors blend courses from engineering, physics, and math to build an understanding of how these areas interact and support

each other. You'll boost your knowledge of the physical environment while discovering how physics is applied to problem-solving in our rapidly changing high-tech world."

Osnovna metodološka ideja je osvježiti relativno stare udžbenike [Cin88, Kul95] dijelom u sadržajnom, ali značajnije u metodološkom smislu. Osnova izlaganja je povezivanje fizikalnih koncepcija, numeričkih fizikalnih problema i kompjutorskih simulacija poput odabranih modula projekta PhET

PhET Interactive Simulations
University of Colorado
<http://phet.colorado.edu>

Open Source Physics (OSP)
Davidson College (hosting and support)
<http://www.compadre.org/osp/index.cfm>

Teme će se razrađivati prema paradigmi razvoja problema u kojem se na svakoj razini povećava tehnička i fizikalna složenost problema. Razvoj konceptualnog znanja slijedi uobičajenu praksu u softverskom inženjerstvu: jednostavni problem se polako komplicira, a u svakom koraku se prikazuje rješenje s dubinskim razumijevanjem. Na taj način nova složenija razina problema se oslanja na već poznato te se student može usredotočiti na novi fenomen koji donosi viša razina.

Pitanja koja će se razmatrati u poglavlju o termalnim pojavama 2 su:

- Što je temperatura i termometri-ja?
- Što je toplina i kakvu ima vezu s temperaturom?
- Kakva je veza temperature, topline i energije?
- Koja je mikroskopska pozadina temperature?
- Što su to termodinamički procesi, ravnoteža, entropija?
- Kakva je mikroskopska pozadina entropije?

Pitanja koja će se razmatrati u poglavlju o dinamici gibanja fluida 3 su:

- Kojim fizikalnim veličinama opisujemo gibanje fluida?
- Koje jednadžbe upravljaju dinamikom?
- Kakva je veza zakona sačuvanja i dinamike?
- Kakve vrste pobuda susrećemo u fluidima?
- Što je karakteristično za neravnotežne termodinamičke procese?

Pitanja koja će se razmatrati u poglavlju o elektricitetu i magnetizmu 4 su:

- Što je električno polje?
- Kako funkcionira jednostavni strujni krug?
- Što znače pojmovi napon, struja, otpor, kapacitet, induktivitet kada govorimo o strujnim krugovima?
- Koja je razlika između AC i DC struje?
- Koji je princip rada električnih motora i generatora? Koja je razlika između stalnog magneta i elektromagneta? Kako radi električna mreža, koja opskrbljuje domove i industriju strujom?
- Što je magnetsko polje? Zašto se igla kompasa zakreće prema sjeveru?
- Koja je točno veza između elektromagnetskih polja i svjetla?
- Kako nastaju slike zrcala i leće?
- Što uzrokuje žive boje koje se pojavljuju u sapunici i dugi?

Fizikalna objašnjenja ovih i sličnih pitanja su predmet ovog priručnika. Priručnik je zamišljen da se kontinuirano nadopunjuje i osvježava tako da su teme obrađene s različitom zastupljenošću i pristupom. Dva su razloga: priručnik je selektivan prema temama koje nisu primjereno predstavljene standardnom literaturom, a drugi je činjenica

da su neke teme "tradicionalno" studentima teške. Ipak se očekuje zastupljenost svih područja s vremenom, a posebno nakon nekog perioda korištenja i povratne informacije od korisnika.

Počevši od jednostavnih električnih, magnetskih i optičkih učinaka koji su poznati već tisućama godina, mi ćemo postupno ući u trag razvoju elektromagnetske teorije, ilustrirajući ovu fascinantnu priču sa kompjutorskim simulacijama prirodnih elektromagnetskih pojava i svakodnevnih električna uređaja. Pažljivim rješavanjem i eksperimentiranjem, studenti će steći temeljito razumijevanje osnovnih pojmova.

U poglavlju 2 je korištena skripta prof. D.K. Sunka "Statistička fizika i termodinamika" [Sun11] koja je pisana na višoj razini tako da možda nije prikladna za izravno korištenje u svim svojim dijelovima. Izlaganje u poglavlju 2 i 3 je dijelom inspirirano izlaganjima iz sjajnog udžbenika autora prof. Yavorsky i prof. Pinsky [YP75]. Dijelovi materijala iz područja elektromagnetizma u ovom priručniku su preuzeti s dozvolom iz vrlo dobrih predavanja prof. Richard Fitzpatrick [Fit07]. Ovom prilikom mu izražavam duboku zahvalnost za ustupanje prava da se dijelovi njegovih predavanja ugrade u ovaj priručnik. Postoji još niz izvora, posebno zajednica nastavnika i znanstvenika koja svoje znanje i iskustvo nesebično dijeli putem web prostora, koje nije moguće popisati, koji su utjecali posredno, a bez kojih ovaj rad ne bi bio moguć. I njima se ovim putem zahvaljujem.

Također bi trebali biti u mogućnosti obavljati različite jednostavne izračune koji uključuju razumijevanje navedenih pojmova.

Program kolegija "Fizika 2" obuhvaća sljedeće teme:

Fenomenološka kalorika i molekularna teorija temperatura i toplina, molekularna teorija topline, plinski zakoni, toplinska svojstva tvari (problem toplinskog kapaciteta), kalorimetrija i fazni prijelazi. (4)

Termodinamika i transportni procesi 2. zakon termodinamike i entropija, razne formulacije, mikroskopska interpretacija, difuzija. (4)

Fluidi u mirovanju gustoća, tlak, Arhimedov princip, strojevi (2)

Fluidi u gibanju tok fluida, kompresibilno gibanje fluida, Bernoullijeva impulsna i jednadžba kontinuiteta, Torricellijev teorem, viskoznost, Poiseuille-ov zakon, Reynol-

dsov broj i turbulentno gibanje. (6)

Molekularne sile i agregatna stanja tvari molekularne sile, red dugog doseg a i kristalna struktura, red kratkog doseg a, pare, fazne pretvorbe u tvarima (4)

Elektricitet i magnetizam naboji, polja, struje, električno i magnetsko polje, Kirchoffovi zakoni, strujni krugovi, rad i snaga električne struje, magnetostatika. (8)

Električna i magnetska svojstva tvari električna svojstva vodiča, dielektrika i poluvodiča, magnetska svojstva materije. (6)

Elektromagnetsko zračenje elektromagnetska indukcija, Maxwlove jednadžbe i elektromagnetski spektar. Primjena na razne mjerne tehnike. (6)

Fizikalna i geometrijska optika ogib, interferencija, zrcala, leće, optičke sprave (mikroskop, teleskop).

Poglavlje 2

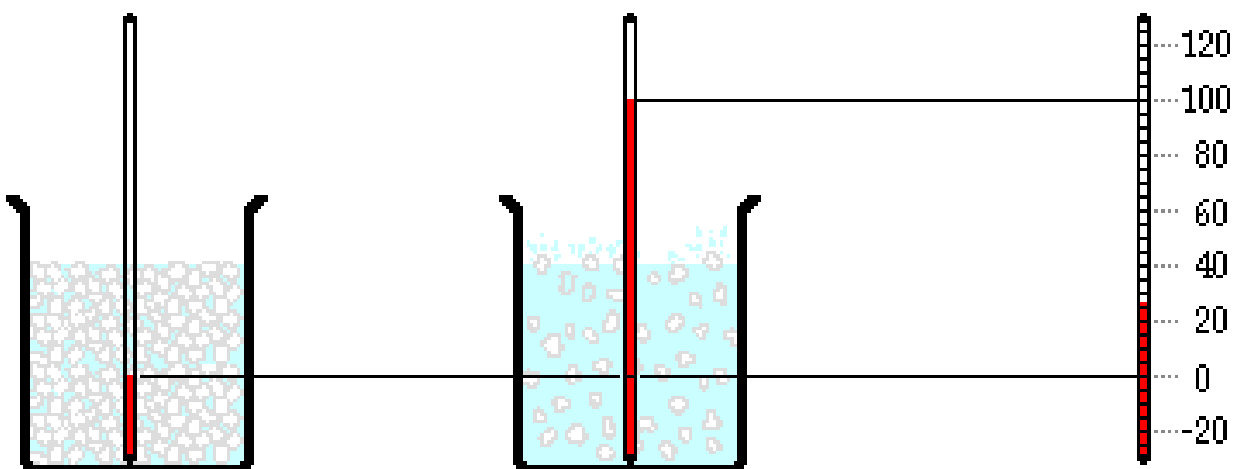
Termalna fizika

"Thermodynamics is a funny subject. The first time you go through it, you don't understand it at all. The second time you go through it, you think you understand it, except for one or two small points. The third time you go through it, you know you don't understand it, but by that time you are so used to it, it doesn't bother you any more."

- Arnold Sommerfeld

2.1 Termometrija i toplina

Temperatura je mjera prosječne kinetičke energije čestica koje čine ispitivanu tvar. Temperatura se ne smije zamjenjivati s termalnom energijom. Termalna energija je dio ukupne energije sadržane u određenoj masi tvari koja određuje temperaturu. Da bismo bolje uočili važnu razliku promotrimo što se događa s termalnom energijom i temperaturom kada pomiješamo 1 kg vode pri 30°C s još jednim 1 kg vode pri 30°C . Iz iskustva znamo da će temperatura ostati 30°C nakon miješanja, ali će se iznos termalne energije udvostručiti. U fizici kažemo da je temperatura intenzivna termodinamička veličina.



Slika 1.1: Baždarenje termometra.

2.1.1 Fiksne točke

Za definiranje skale temperature, potrebno je imati barem dvije fiksne točke. To su temperature na kojima se neka fizikalna svojstva očituju na eksperimentalno jasan način da ih je pogodno iskoristiti za zadavanje točaka u definiranju skale temperature. Dobri kandidati su npr. taljenje, ključanje. Neke uobičajene fiksne točke koje se promatraju:

1. ledište vode - temperatura pri kojoj je čista voda u stanju leda u ravnoteži s tekućom vodom pri standardnom atmosferskom tlaku (760 mm Hg).
2. točka isparavanja vode - temperatura pri kojoj su čista voda kao tekućina u ravnoteži s vodenom parom pri standardnom atmosferskom tlaku.
3. Trojna točka - temperatura pri kojoj sva tri stanja čiste vode: led, tekućina i para istodobno postoje u ravnoteži¹ Na termometrima je skala između dvije fiksne točke podijeljena u određenom broju stupnjeva. Razmak između gornjih i donjih fiksnih točaka naziva se osnovni interval skale temperature.

Postupak je prikazan na sl. 1.1 gdje se koriste dvije uobičajene fiksne točke. Jedna od značajki procesa taljenja i isparavanja je pojava da je tijekom procesa temperatura

¹postoje trojne točke i za mnoge druge tvari osim vode

stalna bez obzira na dotok termalne energije u tvar koja se tali ili isparava. Ove pojave nazivamo faznim prijelazima između čvrste i tekuće odnosno tekuće i plinovite faze tvari. O tome će biti riječi kasnije u odjeljku 2.3.2.

2.1.2 Nulti zakon termodinamike

Ključni pojmovi termalne fizike su termička ravnoteža i temperatura. Za oba pojma imamo intuitivno znanje koje se može opisati jednostavnim procesom koji smo vjerojatno vidjeli mnogo puta. Ako početno imamo dva odvojena tijela od kojih je jedno toplije, a drugo hladnije. Dovedemo li ih u *termički kontakt* i pričekamo neko vrijeme ustanovit ćemo da više ne možemo odrediti razliku u zagrijanosti. Ovo je posljedica fundamentalnog procesa toplinske izmjene. Energija je prešla s toplijeg na hladnije tijelo i ona su došla do stanja ravnoteže nakon kojeg nema daljnjeg prijenosa topline. Ovakvo stanje nazivamo *termička ravnoteža* i očekujemo u skladu s našim intuitivnim pojmom da su oba tijela na istoj temperaturi. Proces koji ih je doveo u stanje *termičke ravnoteže* se naziva *termalizacija*.

Napomenimo ovdje da termodinamika "ne zna" koliko treba čekati ravnotežu. Iz iskustva znamo da će se za metale čekati kraće nego za plastike. Ove pojave nas vode na pojmove poput toplinske vodljivosti koje termodinamika ne može objasniti. Da bismo predvidjeli vrijednosti ovakvih veličina obično je potrebno poznavati mikrostrukturu tvari.

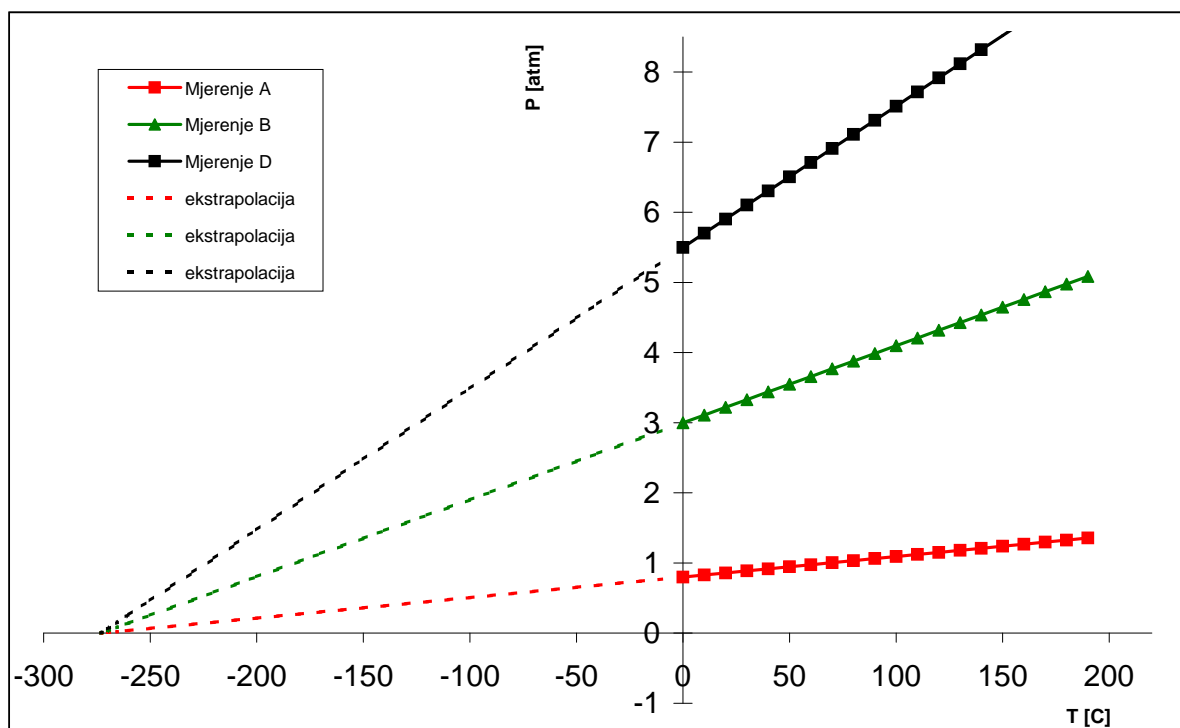
Ako je više tijela u termičkoj ravnoteži očekujemo da su sva na istoj temperaturi. Ovo očekivanje se obično "posprema" u tvrdnju koja se naziva *nulti zakon termodinamike*, a glasi:

Ako su dva sistema odvojeno u termalnoj ravnoteži s trećim onda su ravnoteži i međusobno.

U početcima termodinamike ova se tvrdnja uzimala kao očita te je zato dobila redni broj 0. Drugi zakoni su već bili formulirani. Bez obzira ona nam kaže ukratko "termometri rade". Ako tijelo kojem mjerimo temperaturu dovedemo u termalni kontakt s drugim koje ima neku značajku ovisnu o temperaturi na točno određen način (npr iznos volumena). Drugo tijelo zovemo *termometar*, a nulti zakon nam garantira da kalibriranje *termometra* prema nekom standardnom termometru uvijek daje konzistentne rezultate.

Bilo koje tijelo možemo koristiti kao termometar, neovisno od čega se sastoji, i pri tome će se svi takvi termometri slagati koje je od dva tijela "toplije".

2.1.3 The Kelvin (apsolutna) skala temperatura



Slika 1.2: Tlak u ovisnosti o temperaturi u eksperimentima s razrijeđenim plinovima uz stalni volumen. Uočite, za sva tri mjerenja, ekstrapolirani tlak ima vrijednost nula pri temperaturi -273.15°C .

Na slici 1.2 je prikazan rezultat koji se dobije mjerenjem ovisnosti tlaka u razrijeđenim plinovima o temperaturi uz stalni volumen. Ovaj rezultat ne ovisi o vrsti plina ili masi tako da je osnova za izradu plinskoga termometra o čemu će biti riječi u odjeljku 2.2.4. Ovaj eksperiment upućuje na postojanje temperature na kojoj tlak iščezava univerzalno za sve plinove. Ovo je izvanredan rezultat koji daje posebno mjesto ovoj temperaturi. Ona se koristi kao baza za apsolutnu temperaturnu skalu za koju se vrijednost nula postavlja na -273.15°C .

Kako je ledište i vrelište eksperimentalno teško utvrđivati 1954.god. "International Committee on Weights and Measures" je za apsolutnu skalu odabrane druge dvije fik-

sne točke. Odabrana je trojna točka vode kao gornja fiksna točka i apsolutna nula (nula molekularnog gibanja) kao donja. Trojnoj točki vode je dodijeljena temperatura 273.16 K dok je točka ledišta 273.15 K, a 373.15 K je točka isparavanja. Po definiciji jedan stupanj Kelvina je: $1/273.16$ (oko 0,00366) razlike između apsolutne nule i trojne točke vode.

2.1.4 Celzijeva skala temperature

Uvedena da zamijeni centigradnu razmjernu skalu. Centigradna razmjerna skala je imala talište leda kao donju fiksnu točku i točku ključanja vode kao gornju fiksnu točku, a obje mjerene pri standardnom atmosferskom tlaku. Međutim, za razliku od trostruke točke vode, talište leda se ne može mjeriti s dovoljnom preciznošću da bi to postalo apsolutna oznaka. Celzijeva skala je usko povezana s Kelvinovom skalom. Po definiciji jedan stupanj Celzijusa je: $1 / 273,16$ (oko 0,00366) razlike između apsolutne nule i trostruke točke vode. Definicija je ista i za stupanj Kelvina. Dakle, promjena temperature od 1 K jednaka je promjeni od 1°C .

2.2 Termometri

2.2.1 Termometri s tekućinom

Radi na načelu ekspanzije tekućine u vakuumiranoj cijevi pri čemu se opaža linija površine tekućine uz skalu koja je nanosena na cijev. Postoji niz nedostataka ovog instrumenta:

1. Staklo se i samo širi i skuplja, a što dovodi do pogreške u izmjerenim temperaturama.
2. Pogreške paralakse dozvoljavaju preciznost očitavanja od samo 0.1°C .
3. Promjer cijevi nije stalan.

alkohol	živa
transparentna tekućina, mora se koristiti s bojom vodljivost topline je mala prijanja uz staklo - konkavni meniskus raspon temperature $-114.9^{\circ}\text{C} - 150^{\circ}\text{C}$	neprozirna metal - vodljivost topline je dobra ne prijanja uz staklo - konveksni meniskus raspon temperature $-39^{\circ}\text{C} - 356^{\circ}\text{C}$

Tablica 2.1: Značajke tekućina u termometrima.

4. Relativno veliki toplinski kapacitet termometra znači da ne reagira brzo i može utjecati na temperaturu koju pokušavaju mjeriti.

Tablica 2.1 predstavlja osnovne značajke tekućina koje se koriste u termometrima: alkohol i živa usporedno.

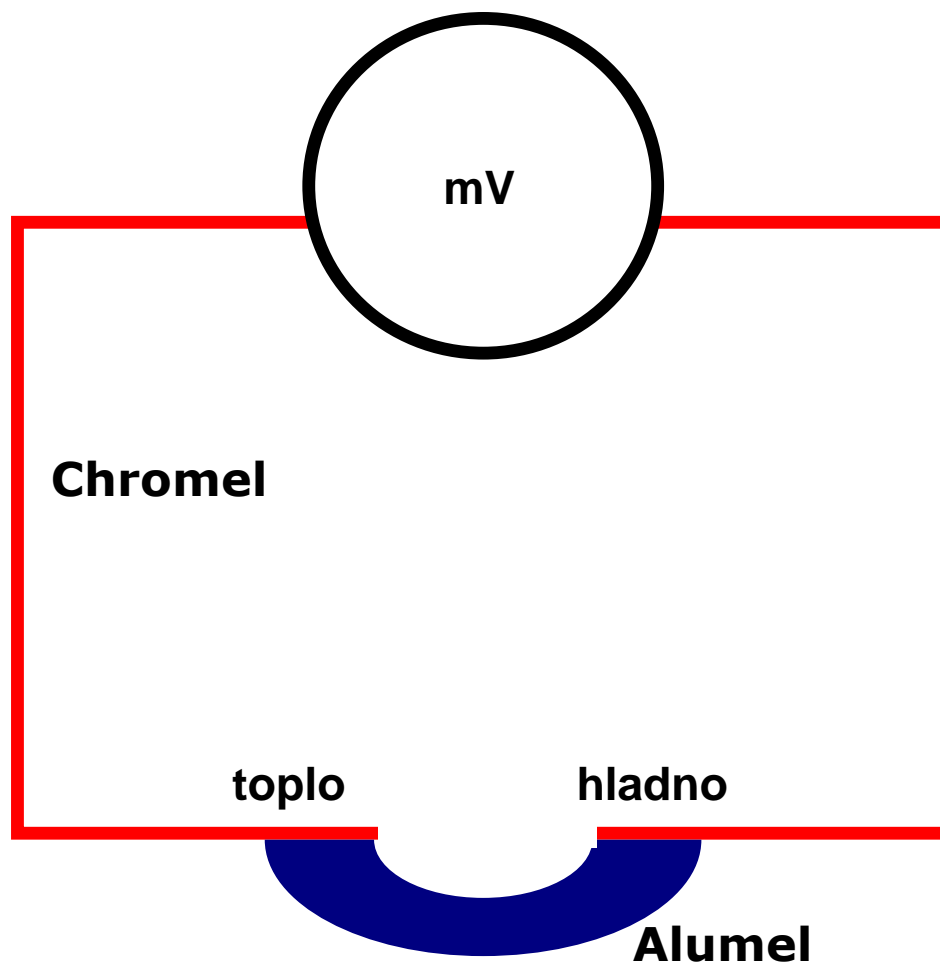
2.2.2 Termočlanci

Zasnovani su na principu termoelektričnog učinka: Seebeckova, Peltierova ili Thomso-nova. Ako dvije žice načinjene od različitih metala spojimo na jednom kraju na slobodnim krajevima se pojavi elektromotorna sila. Osnovni princip za korištenje ove pojave za mjerenje temperature je veza generirane elektromotorne sile i temperature na spoju. Ova ovisnost je parabolična na način da postoji maksimum elektromotorne sile pri određenoj temperaturi koja se naziva neutralna temperatura. Tipični parovi metala ili legura su, pored prikazanih na sl. 2.1, još i Pt/Pt-Rh, Fe/konstantan, Cu/konstantan, a razlikuje ih raspone temperatura u kojima se mogu koristiti.

2.2.3 Termootpori i termistori

Činjenica da električni otpor toku struje u metalima ovisi o temperaturi čini ih idealnim kandidatom za izradu osjetila temperature. Najčešće korišteni metal je platina zbog vrlo visoke temperature taljenja 1773°C te velikog temperaturnog koeficijenta električnog otpora².

²Visoka osjetljivost jer mala promjena temperature uzrokuje znatni porast električnog otpora - veličine koju mjerimo termotporom.

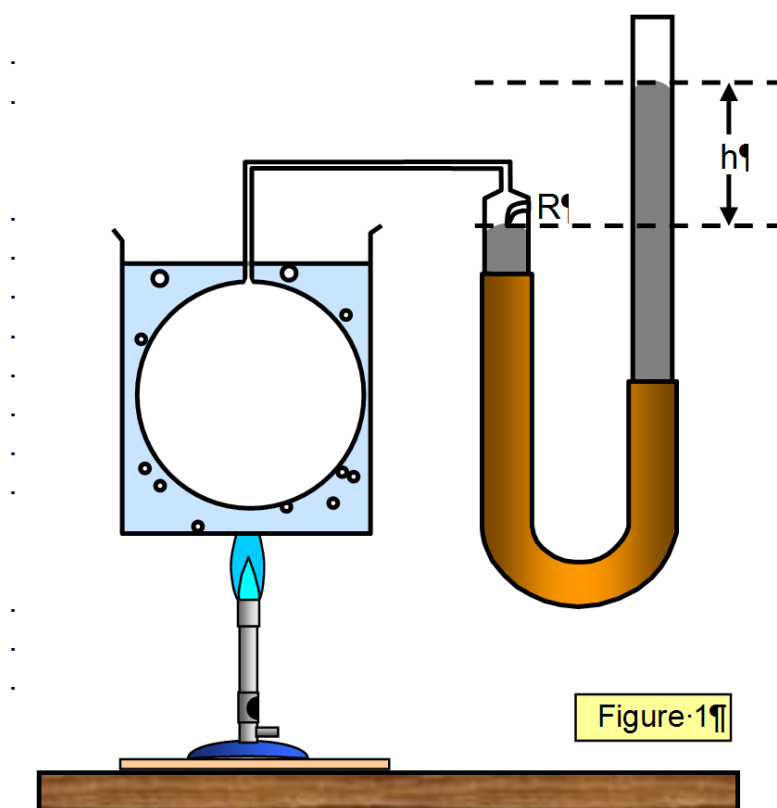


Slika 2.1: Tipična praktična izvedba termočlanka s dvije legure. Maksimalna temperatura ovog spoja je oko 1100°C

Za razliku od metala poluvodiči imaju obrnutu ovisnost električnog otpora o temperaturi tako da im otpor opada s povišenjem temperature. Vrijednosti temperaturnog koeficijenta električnog otpora su visoke tako da su poluvodiči također dobri kandidati za izradu termometra. Pogodni su za raspon $-80^{\circ}\text{C} - 300^{\circ}\text{C}$. Daljnja fizikalna značajka termistora je vrlo mali toplinski kapacitet tako da ne ometaju okolinu gdje su postavljeni za mjerenje temperature.

2.2.4 Plinski termometar stalnog volumena

Ovo rješenje se zasniva na eksperimentalnim rezultatima koji su prikazani na sl. 2.2. Staklena tikvica je ispunjena zrakom, a cijev živom tako da je razina žive u obje cijevi ista. Na tu se razinu postavi oznaka koja predstavlja referentnu točku. Tikvicu uronimo u vruću tekućinu kojoj mjerimo temperaturu i kako se zrak širi počne potiskivati živu u lijevom dijelu cijevi prema dolje, a u desnom prema gore. Da bismo ispravno korelirali temperaturu i tlak potrebno je volumen zraka vratiti na prvotnu vrijednost što znači da u lijevom dijelu živa mora doći do prije postavljene oznake. To postizemo tako da spuštamo desni kraj dok se razina ne poklopi s postavljenom oznakom.



Slika 2.2: Tipična izvedba plinskog termometra zasnovanog na ponašanju plina pri stalnom volumenu.

Nakon ovoga očitamo u mm razliku razina žive lijevo i desno h . To je mjera tlaka plina ne uzimajući u obzir i atmosferski tlak p_A . Uzimajući u obzir i utjecaj atmosfere

dobivamo za tlak plina u ovisnosti o temperaturi sljedeći izraz (tlak mjerimo u mm Hg):

$$p(T) = p_A + h(T)$$

Za vježbu pokažite da je temperatura dana plinskim termometrom

$$T = \frac{p(T) - p_0}{p_{100} - p_0}$$

gdje su p_0 , p_{100} tlakovi koje smo dobili baždarenjem plinskoga termometra talištem i vrelištem vode. Preciznost određivanja temperature ovakvim uređajem ne može biti veća od dva decimalna mjesta. Tipični izvori nepouzdanosti su

- temperatura plina u cijevima nije jednolika i odstupa za različite iznose od temperature tekućine koju mjerimo ovisno o položaju
- volumen staklene tikvice se povećava zagrijavanjem
- zrak nije idealni plin tako da ne vrijedi proporcionalnost tlaka i temperature uz stalni volumen

Pokušajte predložiti neka načela koja bismo trebali slijediti u osmišljavanju ovakvog plinskog termometra kako bismo mogli umanjili utjecaje navedenih izvora pogrešaka.

2.3 Kalorimetrija

2.3.1 Toplinski kapacitet

Toplinski kapacitet nekog tijela C se definira relativno jednostavnom relacijom:

$$\Delta Q = C\Delta T \quad (3.1)$$

ΔQ je prenesena toplina, a ΔT je promjena temperature tijela povezana s tim prijenosom.

Obzirom da je za neku tvar prenesena toplina potrebna za zadani porast/pad temperature proporcionalna masi pogodno je promatrati veličinu koja se dobije tako da se

toplinski kapacitet podijeli s masom tijela. Ta se veličina naziva specifični toplinski kapacitet c , a definira ju relacija

$$\Delta Q = cm\Delta T$$

gdje je m masa tijela. Toplinski kapacitet, odnosno specifični toplinski kapacitet se mjeri u JK^{-1} , odnosno $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$. Kako je toplina u fizici procesna veličina tako i toplinski kapaciteti ovise o konkretnom procesu prijenosa topline. Podrobnije fizikalno izlaganje o ovoj temi za plinove odgađamo za cjelinu 2.5.4, a za sada gledamo praktičnu, fenomenološku stranu ove veličine.

Specifični se toplinski kapacitet tekućine može odrediti korištenjem električnog grijača i kalorimetra (dobro izolirane posude). Električni grijač, koji se uroni u tekućinu unutar kalorimetra, za zadano vrijeme zagrije tekućinu s početne T_p na neku konačnu temperaturu u T_k . Pri zagrijavanju se promatra pored temperature napon V i električna struja I koja teče kroz grijač. Energija koja se preda sistemu kalorimetra s tekućinom iznosi:

$$Q = Vit$$

i ona je jednaka energiji koju primi sistem kalorimetra s tekućinom, a iznosi:

$$Q = m_L c_L (T_k - T_p) + m_c c_c (T_k - T_p)$$

gdje je:

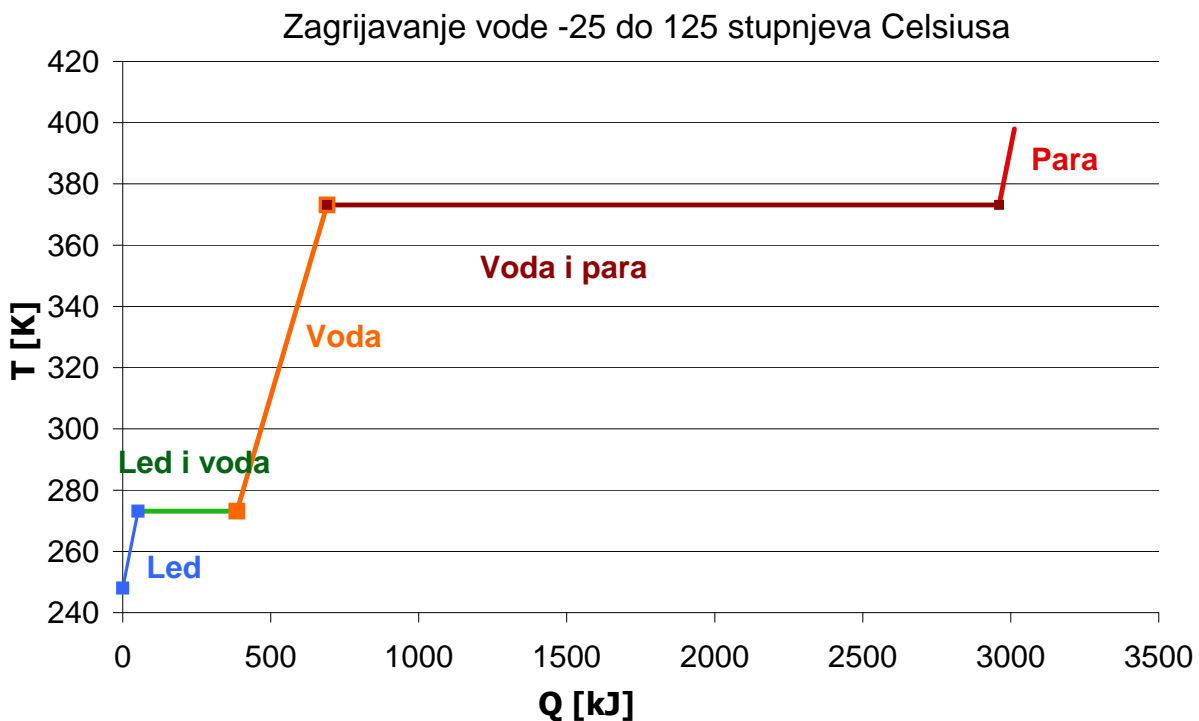
- m_L : masa tekućine
- m_c : masa kalorimetarske posude
- c_L : specifični toplinski kapacitet tekućine
- c_c : specifični toplinski kapacitet posude

Pretpostavlja se da je jedina nepoznata veličina specifični toplinski kapacitet tekućine, a on se jednostavno odredi pomoću jednadžbe:

$$Vit = m_L c_L (T_k - T_p) + m_c c_c (T_k - T_p)$$

gdje se vrijednosti ostalih veličina dobivaju izravnim mjerenjem.

Mjerenje specifičnog toplinskog kapaciteta u čvrstom stanju se određuje na sličan način samo što u tom mjerenju uzorak koji ispitujeemo izoliramo, a termometar i električni grijač umetnemo u rupe koje izbušimo u uzorku (obično se priredi valjkasti uzorak). Preciznost se može dodatno povećati ukoliko se iskoristi i korekcija zbog hlađenja uzorka tijekom grijanja. Korekcija se obično zasniva na tzv Newtonovu zakonu hlađenja koji kaže da je brzina hlađenja proporcionalna razlici temperature uzorka i okoline.



Slika 3.1: Krivulja zagrijavanja vode s prikazom faznih prijelaza. Primijetite relativne odnose latentne topline kondenzacije i isparavanja.

2.3.2 Latentna toplina

Termalna energija povezana s faznim prijelazom - procesom u kojem tvar mijenja unutrašnju strukturu. Latentna toplina je oblik energije koji općenito ima dvije komponente: prva je povezana s unutrašnjom potencijalnom energijom (energija međudjelovanja atoma ili molekula), druga je vanjski rad povezan sa širenjem (pozitivan) ili skupljanjem (negativan) tvari.

Fazne pretvorbe koje uključuju latentnu toplinu su taljenje/skrućivanje pri prijelazu iz čvrste u tekuću fazu ili obratno te isparavanje/kondenzacija, pri prijelazu tekuće u plinovitu ili obratno te sublimacija pri prijelazu čvrste u plinovitu ili obratno. Osnovna pojava je prijenos latentne topline s tvari u pretvorbi na okolinu tijekom taljenja ili isparavanja i obratno tijekom skrućivanja ili kondenzacije. U fizici ove pretvorbe nazivamo faznim pretvorbama prvog reda, a ilustrira ih graf na slici 3.1 koji prikazuje tijek zagrijavanja tipične tvari od čvrste faze do zagrijavanja plina. "Ravna" područja tijekom zagrijavanja odgovaraju faznom prijelazu kada se temperatura tvari ne mijenja unatoč neprestanom dotoku topline zagrijavanjem. To znači da je prosječna kinetička energija na molekularnoj razini tijekom fazne pretvorbe stalna.

2.3.3 Eksperimentalno određivanje latentne topline

Kao i za većinu drugih važnih pojava u prirodi razvijen je niz metoda s pomoću kojih možemo odrediti latentnu toplinu za različite tvari i fazne prijelaze. Za potrebe ovih razmatranja pogledat ćemo dvije jednostavne metode koje se bave taljenjem i isparavanjem.

Eksperiment kojim se može izmjeriti latentna toplina taljenja vode može se izvesti na sljedeći način. U kalorimetar s termometrom ulijemo zagrijanu vodu kojoj smo prethodno odredili masu T_p , m_w te dodamo nekoliko kocki leda temperature i mase T_l , m_l . Lagano miješamo smjesu dok se sav led ne otopi i obavimo završno očitavanje temperature T_k , a zatim i vaganje ukupne mase $m_w + m_l$. Fundamentalna kalorimetrijska relacija zanemarujući toplinske prijenose prema okolini je dana s:

$$m_w c_w (T_p - T_k) + m_c c_c (T_p - T_k) = m_l L_l + m_l c_w (T_k - T_l) \quad (3.2)$$

gdje su veličine:

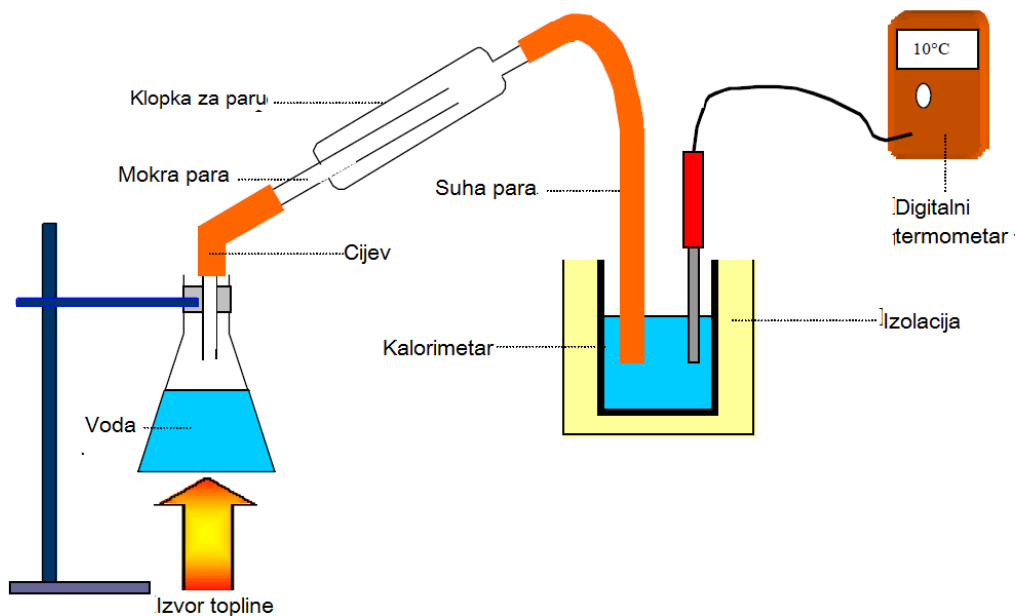
- m_w : masa vode
- m_l : masa leda
- m_c : masa kalorimetarske posude
- T_p : početna temperatura vode

- T_k : konačna temperatura vode
- T_l : početna temperatura leda
- c_w : specifični toplinski kapacitet vode
- c_c : specifični toplinski kapacitet posude

i na kraju L_l je tražena latentna toplina taljenja leda.

2.3.4 Eksperimentalno određivanje latentne topline isparavanja vode

Kao sljedeći primjer prikazat ćemo jednostavni postupak kojim se može odrediti latentna toplina isparavanja vode. Shematski prikaz je dan na sl. 3.2. Osnovni dijelovi su



Slika 3.2: Aparatura za mjerenje latentne topline isparavanja vode.

označeni na slici, a postupak se sastoji iz sljedećih koraka:

1. U tikvicu do polovine ulijemo vodu i postavimo cijevi i ostale dijelove kao na sl. 3.2.
2. Zagrijavamo dok se para počne neprekidno strujati.

3. Odredi se masa kalorimetra m_{kal} .
4. Kalorimetar do polovice ispunimo s vodom ohlađenom oko 10 stupnjeva ispod temperature prostorije.
5. Izmjerimo masu m_1 vode i kalorimetra.
6. Masa ohlađene vode je $M_v = m_1 - m_{\text{kal}}$.
7. Zabilježi se temperatura kalorimetra i vode T_1 .
8. Usmjerite suhu paru u kalorimetar s vodom i pričekajte dok temperatura poraste za oko 20 stupnjeva C.
9. Uklonite cijev za dotok pare iz vode, pazeći da ne uklonite dio vode iz kalorimetra.
10. Očitajte konačnu temperature T_2 kalorimetra s vodom i kondenziranom parom. Pad temperature pare je $100^\circ - T_2$.
11. Porast temperature kalorimetar s vodom je $T_2 - T_1$.
12. Izmjeri masu kalorimetra s vodom i kondenziranom parom m_2 . Dakle masa kondenzirane pare je $m_p = m_2 - m_1$.

Ako je kalorimetar načinjen od polistirena kalorimetrijska jednadžba, gdje je jedina nepoznata veličina tražena latentna toplina isparavanja vode L_p , je dana s jednostavnijim izrazom:

$$m_p L_p + m_p c_v (100^\circ - T_2) = m_v c_v (T_2 - T_1)$$

u slučaju bakrenog kalorimetra na desnoj strani jednadžbe treba dodati i doprinos kalorimetra $m_{\text{kal}} c_{\text{Cu}} (T_2 - T_1)$. Ukoliko eksperiment izvedemo pažljivo i postignemo uvjete tako da je raspon temperature vode u kalorimetru simetričan oko sobne temperature postizemo kraćenje topline koja ulazi u i izlazi iz sistema (u gornjem prijedlogu gdje krećemo 10 stupnjeva C ispod sobne temperature pokušamo dobiti konačnu temperaturu T_2 10 stupnjeva C iznad sobne temperature).

2.4 Jednadžba stanja sistema

Model idealnog plina se proučava na više razina nastave i dovoljno je jednostavan da ovdje nećemo posebno razrađivati pojedinosti vezane uz njega. Prisjećamo se samo osnovnih pretpostavki koje stoje iza tog modela:

1. molekule plina je nemoguće razlikovati, male su i sferične
2. srazovi molekula su savršeno elastični, gibanje je bez trenja
3. dinamiku gibanja određuju Newtonovi zakoni
4. prosječna udaljenost između molekula je znatno veća od veličine pojedine molekule
5. molekule se gibaju nasumično i po iznosu i po smjeru, ali određenom raspodjelom udjela broja molekula po brzinama koja se ne mijenja
6. zanemarive su sve sile s dosegom većim od dodira između molekule i okoline (molekule se jedino sudaraju elastično sa "zidovima")

Od navedenih uvjeta posebno ističemo nužnost da je plin rijedak ili, kako je navedeno, da je prosječna udaljenost između molekula velika prema tipičnoj dimenziji same molekule. Ovaj uvjet je najčešći razlog odstupanja realnih plinova od predviđanja koja zadaje ovaj model. Bez posebnog dokazivanja navodimo fundamentalni rezultat, a to je jednadžba stanja idealnog plina:

$$pV = N k_B T = n R T \quad (4.1)$$

gdje je s N označen broj molekula, a s n broj molova. T je asolutna temperatura u K , p tlak i V volumen.

Jednadžba stanja (4.1) samo je jedna od mnogih koje susrećemo u proučavanju termodinamičkih sistema. Sisteme opisujemo termodinamičkim varijablama, ali one, kako se možemo uvjeriti i na primjeru idealnog plina, nisu međusobno neovisne. Praktično to znači da ukoliko su u sistemu, za čiji opis trebamo tlak, volumen, broj molekula i temperaturu, zadane bilo koje tri varijable četvrta ima točno određenu vrijednost. Matematički

to iskazujemo sljedećom relacijom:

$$f(N, p, T, V) = 0 \quad (4.2)$$

gdje je s f dano matematičko preslikavanje četiri varijable u broj 0 koji nam u slučaju zadavanja bilo koje tri varijable postaje algebarska jednadžba s jednom nepoznaticom koju je moguće riješiti ukoliko su zadane vrijednosti poznatih parametara fizikalno konzistentne. Nadalje je jasno da f ne može iskazivati nefizikalnu patologiju (gusto raspoređeni singulariteti, prekidi) što se u jeziku fizike iskazuje zahtijevom da je po dijelovima glatka funkcija više varijabli. Sve jednadžbe stanja koje ćemo susretati u fizici, kemiji i metalurgiji ispunjavaju ovaj uvjet. Bez obzira koja je u primjeni konkretna realizacija ove funkcije³ sama njena egzistencija zadaje teoriju funkcija više varijabli osnovnim matematičkim aparatom termodinamike. Zahtjev glatkosti po dijelovima probire samo "pitome", fizikalne funkcije što uvelike olakšava matematičku težinu u korištenju formalizma.

Jednadžba (4.2) omogućava zamišljanje prikazivanja ravnotežnih stanja sistema u s pomoću ovisnosti termodinamičkih varijabli kao linija ili općenito višedimenzionalnih ploha. Ova tehnika je područje proćavanja faznih dijagrama termodinamičkih sistema, a posebno ćete ju sretati, pored fizike, u nizu specijaliziranih kolegija metalurške struke. Poznati prikazi stanja plina u pV ili pT dijagramu su primjeri ove tehnike i s njima ćemo se posebno upoznati u okviru ovog kolegija

2.5 Zakoni saćuvanja

Dio fizike koji proućava uvjete za pretvorbu jednog oblika energije u drugi za makroskopske sustave⁴ i karakterizira takve procese kvantitativno naziva se *termodinamika*.

³Idealni plin, van der Waals

⁴Sustavi koji se sastoje iz velikog broja ćestica, molekula, a praktićno gotovo svi sustavi s kojima se susrećemo. Precizna definicija bi bila da sistem mora biti znatno većih dimenzija od dosega dominantne sile koja upravlja pojavama u sistemu koji promatramo. Ćaša s vodom je veliki i termodinamićki sustav jer je doseg, elektromagnetskih po prirodi, sila koje upravljaju znaćajkama koje vodu ćine vodom znatno manji od dimenzija ćaše. Ovdje je zanimljivo napomenuti da planetarni sustavi i zvijezde nisu veliki u termodinamićkom smislu jer je doseg gravitacijske sile veći od dimenzije tijela. Ipak fizićari su pronašli naćin da primjene termodinamiku i na zvijezde, na atomske jezgre, samo što pristup zahtijeva dodatni fizikalni aparat koji prelazi okvire ovog razmatranja.

U prethodnim odjeljcima predstavljen je niz fenomena za koja imamo neposredno iskustvo: prijenos topline, promjena faza tvari, temperatura. Većina ljudi se ne bi posebno čudila opisanim eksperimentima, rezultatima, iznesenim tvrdnjama i bez posebnog proučavanja fizike. Ipak, da bismo uspjeli shvatiti dublji smisao pojava i njihovu vezu s Newtonovom mehanikom potrebna su dodatna razmatranja koja se sastoje u preciziranju značenja pojedinih fizikalnih veličina zasnovanih na iskustvu te razvoj matematičkog aparata potrebnog za formuliranje teorije koja omogućava kvantitativni opis pojava. Osnovno opažanje termodinamike je da toplina prelazi s tijela više temperature na tijelo niže što možemo izreći i na način da ako su dva tijela na različitim temperaturama u dodiru, doći će trenutak kada će se njihove temperature izjednačiti. Prijenos topline je povezan s promjenom temperature. Dok prijenos topline⁵ traje govorimo o neravnotežnoj termodinamici i takav proces može općenito biti buran i vrlo kompleksan. Uzmimo da priredimo sistem u nekom ravnotežnom makrostanju (označimo ga s X) i zatim ga stavimo u zatvorenu "kutiju"⁶ gdje se mogu odvijati procesi koje uzrokuje neodređeno kompleksna mašinerija. Bez obzira na neizmjerne broj mogućnosti kako se dani sistem iz početnog ravnotežnog makrostanja X može dovesti u skup ravnotežnih makrostanja (označimo ih sa Y) termodinamika daje odgovor na sljedeće pitanje: Što razlikuje stanja Y do kojih se može u zamišljenom eksperimentu doći od onih koja su nedostupna? Odgovor je inače najdublji sadržaj drugog zakona termodinamike o kojem ćemo kasnije reći nešto više u odjeljku 2.6 i izravno vodi do pojma *entropije*.

2.5.1 Unutrašnja energija

Energija je jedan od najosnovnijih koncepata fizike. Zakon sačuvanja energije proučavamo na svim razinama, a tema je fizike i na razini osnovne škole. Energija prožima većinu tehnoloških problema jer najvažniji programi kojima se bave inženjeri u svom sadržaju promatraju fizikalna ograničenja u transformacijama, prijenosu i korištenju različitih oblika energije. Unutrašnja energija sistema čestica je povezana sa svim doprinosima energiji koji su povezani s kinetičkom, potencijalnom i energijom mirovanja dijelova. Važno je primijetiti da kinetička energija tijela ovisi o odabranom sustavu promatranja, relativnoj brzini promatrača i tijela. Iz tog razloga za promatranje unutraš-

⁵Općenito dok traju makroskopski procesi koji mogu uključivati i druge promjene, npr volumena ili tlaka.

⁶Metafora za cijeli svemir.

nje energije biramo sustav centra mase, a to je referentni sustav u kojem centar mase sistema miruje ili na, drugi način rečeno, sustav u kojem je ukupni impuls nula pa vrijedi

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots = \vec{0}$$

Ovim izborom smo eliminirali iz razmatranja jednostavan doprinos ukupnoj energiji sistema koji dolazi od "organiziranog" gibanja cjeline.

Pretpostavimo da je sistem u stanju gdje je prosječna udaljenost između čestica velika tako da za početno razmatranje možemo potpuno zanemariti energetske doprinose međudjelovanja unutar sistema. U tom slučaju je unutrašnja energija suma energije mirovanja i kinetičke energije svih čestica. To pišemo kao

$$E_0 = (E_0^1 + K^1) + (E_0^2 + K^2) + \dots = (E_0^1 + E_0^2 + \dots) + (K^1 + K^2 + \dots)$$

iz čega se vidi da je unutrašnja energija zbroj ukupne energije mirovanja i ukupne kinetičke energije čestica.

Promatrali smo idealizirani sistem u kojem je zanemareno međudjelovanje čestica u sistemu. U realnim sistemima, osim u vrlo razrijeđenim plinovima, međudjelovanje je vrlo izraženo i odgovorno za mnoge značajke koje opažamo na makroskopskoj razini. Sile kojima su čestice u sistemima izložene obično su privlačne i brzo opadaju s udaljenošću⁷. Potencijalna energija povezana s tim silama ima negativnu vrijednost jer je za nulu potencijalne energije odabran upravo nemeđudjelujući sistem.

Označimo s U_{int} ukupnu potencijalnu energiju međudjelovanja čestica u promatranom sistemu. U fizici kažemo da U_{int} zapravo predstavlja ukupnu energiju polja koje posreduju međudjelovanje između čestica. Uključivši i ovaj važni doprinos dolazimo do konačnog, potpuno općenitog, izraza za unutrašnju energiju

$$E = (E_0^1 + E_0^2 + \dots) + E_k + U_{\text{int}}. \quad (5.1)$$

Unutrašnja energija tijela je jednaka zbroju energija mirovanja čestica koje ga čine plus ukupna kinetička energija E_k čestica plus potencijalna energija U_{int} polja koje posreduju međudjelovanje u sistemu gledano iz sustava centra mase.

U prirodi postoje sistemi, kao stabilne atomske jezgre, u kojima je unutrašnja energija manja od zbroja energija mirovanja dijelova uzrokovane negativnim doprinosom

⁷To je razlog da smo pretpostavili veliku prosječnu udaljenost čestica kao glavnu značajku nemeđudjelujućeg sistema.

potencijalne energije međudjelovanja koja je po apsolutnoj vrijednosti veća od ukupne kinetičke energije. Napomenimo da će u procesima koje u inženjerstvu najčešće promatramo energija mirovanja čestica biti jednostavno konstanta na koju procesi ne utječu tako da se neće eksplicitno računavati u bilancama.

Postoji više mehanizama prema kojima možemo mijenjati unutrašnju energiju tijela:

1. *Deformacija*: uključuje promjenu prosječne udaljenosti čestica pa prema tome i potencijalne energije molekularnog međudjelovanja.
2. *Termalni*: uključuju procese pri kojima se mijenja temperatura kao i one u kojima se mijenja faza (taljenje, isparavanje). Promjena temperature je povezana s promjenom prosječne kinetičke energije molekula, ali istodobno je prisutna i promjena potencijalne energije⁸. Dobro nam je poznato da povećanjem temperature metalnih materijala u čvrstom stanju dolazi do povećanja prosječne udaljenosti ravnotežnih položaja čvorova u kristalnoj rešetci pa prema tome i energiji međudjelovanja molekula.
3. *Kemijske reakcije* : uključuju preraspodjelu molekula bilo raspadom na jednostavnije dijelove ili spajanjem u kompleksnije, a postoje i one s izmjenom atoma bez promjene složenosti na razini cjeline sistema. Suštinska promjena nastaje u promjeni energije međudjelovanja atoma, a može doći i do promjene prirode relativnog gibanja jer molekule produkti reakcije općenito djeluju drukčijim silama od onih prije.
4. *Nuklearne reakcije* : slične kemijskim samo uključuju promjene na razini atomske jezgre, npr preraspodjele čestica koje čine jezgru atoma - protona i neutrona. Ove reakcije uključuju znatne promjene i energije mirovanja sistema.

Pogledajmo na jednostavnim primjerima promjene *unutrašnje energije* pri navedenim procesima.

⁸Osim za vrlo razrijeđene plinove.

Deformacija tijela

Neka je čelični štap duljine $l = 1 \text{ m}$, presjeka $A = 1 \text{ cm}^2$ istegnut silom $F = 2 \times 10^4 \text{ N}$ za $\Delta l = 1 \text{ mm}$. Promjena unutrašnje energije jednaka je radu koji obavi navedena sila:

$$\Delta E_{\text{int}} = W = \frac{F\Delta l}{2} = 10 \text{ J}$$

Da bismo mogli uspoređivati različite procese izračunajmo kolika je promjena po atomu (pojednostavit ćemo račun uzimajući molarnu masu čelika kao da se čelični štap sastoji isključivo od atoma željeza).

$$\frac{\Delta E_{\text{int}}}{N} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{V_{\text{steel}} N_A m_{\text{steel}}/M_{\text{Fe}}} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{lA\rho_{\text{steel}} N_A} \frac{M_{\text{Fe}}}{m_{\text{steel}}} \quad (5.2)$$

$$= \frac{10 \text{ J } 56 \text{ g mol}^{-1}}{100 \text{ cm}^3 7.8 \text{ g/cm}^3 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1.2 \times 10^{-24} \text{ J} \quad (5.3)$$

gdje smo koristili $m_{\text{steel}} = V_{\text{steel}} \rho_{\text{steel}}$

Termalni procesi

Poznato je da za podizanje temperature 1 kg vode za 1 K moramo privesti toplinu $1 \text{ kcal} = 4.18 \times 10^3 \text{ J}$. Ova energija po molekuli iznosi

$$\frac{\Delta E_{\text{int}}}{N} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{N_A m/M_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{4.18 \times 10^3 \text{ J } 18 \text{ g/mol}}{6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} 1000 \text{ g}} = 1.3 \times 10^{-22} \text{ J} \quad (5.4)$$

Vidimo da je termalna energija oko 100 puta veća od energije elastične deformacije 7.8 kg čelika za 0.1%. Ako bismo promatrali faznu pretvorbu 1 kg vode u paru dobili bismo oko 500 puta veću energiju od zagrijavanja za 1 K.

Kemijske reakcije

Sagorijevanje 1 L benzina razvija oko 35 MJ energije, a za kemijski sastav ćemo uzeti da je C_8H_{18} molarne mase 114 g/mol i gustoće 0.7 kg/L. 1 L benzina ima

$$N_A \frac{700 \text{ g}}{114 \text{ g/mol}} = 36 \times 10^{23}$$

molekula. Prema tome energetski učinak po molekuli iznosi

$$\frac{3.5 \times 10^7 \text{ J}}{3.6 \times 10^{24}} = 1.0 \times 10^{-16} \text{ J}$$

što je 10 do 100 puta više od energije termalnih procesa i gotovo milion puta više od energije elastične deformacije.

Nuklearne reakcije

Bez većeg ulaska u elemente računa kod nuklearnih reakcija promotriti ćemo pretvorbu 1 kg teškog vodika (deuterija) u helij pri čemu se oslobađa

$$5.6 \times 10^{15} \text{ J}$$

što je po molekuli otprilike

$$5.6 \times 10^{15} \text{ J} \frac{2 \text{ g/mol}}{1000 \text{ g} \cdot 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1.9 \times 10^{-11} \text{ J}$$

ili 10 000 puta više od tipične energije kemijske reakcije izgaranja benzina (gledano po molekuli).

Ovdje napominjem da su ovi omjeri ujedno i ocjena za relativnu jakost nuklearnih sila prema silama međudjelovanja atoma i molekula u "običnoj" kemiji.

2.5.2 Prvi zakon termodinamike

Pažljiva razmatranja pokazuju da se energiju tijelu može mijenjati djelovanjem vanjskih sila i toplinskom izmjenom s okolinom. Moguće je da su u procesu prisutna oba mehanizma istodobno. U tom slučaju je promjena energije tijela suma oba doprinosa, a to pišemo jednostavnim izrazom:

$$\Delta E = W_{\text{ext}} + Q$$

Rad koji tijelo obavlja da svlada vanjske sile se od rada vanjskih sila⁹ razlikuje samo u predznaku $W = -W_{\text{ext}}$ tako da gornju jednadžbu možemo napisati kao

$$Q = \Delta E + W. \tag{5.5}$$

⁹3. Newtonov zakon.

Dakle *količina energije koju sistem dobije toplinskom izmjenom jednaka je promjeni energije i radu obavljenom na svladavanju vanjskih sila*. Ova tvrdnja se naziva *prvi zakon termodinamike* i ima veliku općenitost u svom sadržaju jer ju je moguće primijeniti na iznimno širok raspon problema.

Ako izvedemo vrlo jednostavan eksperiment u kojem postavimo metalni štap na čvrstu podlogu te ga udarimo snažno nekoliko puta s čekićem i brzo¹⁰ dodirujemo istanjeni dio žice možemo se uvjeriti da je temperatura tog dijela znatno povišena. Iz iskustva također znamo da je povećanje temperature tvari gotovo uvijek usputna pojava pri relativnom klizanju materijala u dodiru. Ovaj mehanizam promjene unutrašnje energije je povezan s radom sila trenja. Ovi primjeri jasno pokazuju da rad vanjske sile može biti mjera promjene unutrašnje energije tvari.

Dodatni mehanizam promjene unutrašnje energije tvari, koji nije povezan s radom sile, nazivamo *toplinska izmjena*. S ovim mehanizmom smo dobro iskustveno povezani jer smo ga vrlo vjerojatno koristili za hlađenje zagrijanog tijela (npr kod uranjanja vrućeg predmeta u hladnu vodu). Fizikalni proces koji realizira energetski transport s tijela na tijelo u dodiru su sudari na molekularnoj razini. Tijelo više temperature karakterizira veća prosječna kinetička energija molekula. Na mjestu dodira tijela dolazi do sudara brzih molekula tijela na višoj temperaturi sa sporijima hladnijeg tijela. U tom procesu dio kinetičke energije molekula se prenosi sudarima na hladnije tijelo kojem raste prosječna kinetička energija molekula. Kao rezultat energija prelazi s toplijega na hladnije tijelo bez obavljanja rada. Podroban opis i preciznu formulaciju opisane pojave zahtijeva analitički aparat statističke fizike o kojem ćemo nešto više reći u dijelu posvećenom entropiji u odjeljku 2.6.5 na str. 58.

U prethodnom paragrafu je opisan prijenos topline koji se ostvaruje izravnim dodiranjem tijela pa se zato zove i *vođenje topline*. Izmjena topline se može ostvariti i putem *konvekcije*. Kod ove pojave se transport obavlja tokom fluida i naziva se *konvektivna izmjena topline*. Ovaj mehanizam je posebno važan za pojave u atmosferi i jedan je od najvažnijih fizikalnih procesa za razumijevanje vremenskih pojava. Jednostavan primjer možemo vidjeti u posudi s vodom koju zagrijavamo na štednjaku ili pojavu snažnog vertikalnog strujanja plinova iznad otvorenog plamena. Fizikalno objašnjenje fenomena

¹⁰Ovdje treba biti oprezan jer se temperatura metala može pod određenim okolnostima toliko povećati da pri dodiru izazove opekline.

kod sloja fluida u kontaktu s tijelom visoke temperature (grijač) je da se fluid grije (razrijeđuje) i podiže dajući tok tvari. Umjesto zagrijanog fluida koji je tokom napustio područje uz grijač dolazi nova količina hladnog. Proces transporta se u ovom slučaju odvija znatno brže od izmjene topline vođenjem s okolnim fluidom na nižoj temperaturi tako da se ostvaruje stalan tok dok god je prisutan grijač. Kvantitativno fizikalno opisivanje ovih pojava je iznimno složeno, a uključuje sofisticirani aparat dinamike gibanja fluida o kojoj ćemo nešto više reći u poglavlju 3.

Treća opća metoda prijenosa topline je putem vidljivog i nevidljivog zračenja. Ovaj mehanizam se može predstaviti jednostavnim eksperimentom. Postavimo ruku ispod ugrijana glačala na udaljenost oko 20 cm. Bez problema možemo osjetiti da je iznad ruke snažan izvor termalne energije. Ono što opaža naša ruka ne može biti uzrokovano *konvekcijom* jer je tok ugrijanog zraka usmjeren prema gore, a ne prema ruci. To ne može biti niti *vođenje* jer je zrak općenito vrlo loš vodič topline. U ovo se možemo dodatno uvjeriti ako postavimo metalnu ploču u prostor između glačala i ruke (naravno bez dodira). U tom slučaju gotovo da ne osjećamo toplinu ploče glačala iako metali daleko bolje vode toplinu od zraka.

Pažljivi fizikalni eksperimenti su otkrili da svako zagrijano tijelo zrači cijeli spektar elektromagnetskog zračenja¹¹. Ovaj mehanizam se naziva *izmjena topline zračenjem*. Pokazuje se da tijela ugrijana znatno iznad sobne temperature zrače snažno u infra-crvenom dijelu spektra, a na temperaturama 800°C – 1200°C i vidljivom svjetlošću. To je glavni razlog zašto užareni metali koji se susreću u metalurškim procesima mijenjaju boju u jarko narančastu. Dodatna važna značajka ovog fenomena je mogućnost toplinskog transporta u vakuumu tako da se termalna energija do nas uspješno doprema *zračenjem* sa 150 miliona kilometara udaljenog Sunca kroz međuprostor bez tvari omogućavajući život i ostale pojave koje vidimo u našem okolišu.

2.5.3 Adijabatski izolirani sistem

U mehaničkim razmatranjima sistem smatramo *zatvorenim* ako možemo zanemariti utjecaj vanjskih sila u usporedbi s unutrašnjim međudjelovanjem. Prema tome slijedi da je u takvom sistemu rad vanjskih sila nula.

¹¹Intenzitet zračenja ovisi o temperaturi tijela i frekvenciji tako da se znatno razlikuje u pojedinim dijelovima spektra.

Adijabatski izolirani sistem je onaj u kojem možemo zanemariti izmjenu topline s okolinom. Prema ovoj definiciji toplina koju sistem primi ili preda okolini je jednaka nuli. Ovakav koncept je svakako idealizacija nekih realnih procesa jer nije moguće u potpunosti izolirati sisteme, ali je u nekim slučajevima pogodno krenuti baš od ovakve idealizacije. Primjer ovog pristupa su kalorimetrijski eksperimenti opisani u odjeljku 2.3 (vidi izraz 3.2 koji pretpostavlja da je kalorimetrijska posuda izolirani adijabatski sistem).

Pogledajmo sada kakve posljedice slijede ako *prvi zakon termodinamike* (5.5) primijenimo na *adijabatski izolirani* i *zatvoreni* sistem. *Zatvorenost* znači da sistem ne obavlja rad u svladavanju utjecaja vanjskih sila pa je $W = 0$, a *adijabatska izoliranost* znači da sistem niti prima niti otpušta termalnu energiju $Q = 0$. Slijedi da je $\Delta E = 0$ ili riječima *ukupna energija zatvorenog i adijabatski izoliranog sistema se ne mijenja*. Ovo je najopćenitiji izraz *zakona sačuvanja energije* jednog od fundamentalnih principa fizike koji je prema dosadašnjim istraživanjima valjan na svim prostornim i vremenskim skalama, a sastavni je dio i svih fizikalnih teorija¹². U mehaničkim sistemima, koje smo proučavali u okviru kolegija "Fizika 1", izravno opisanih Newtonovom mehanikom zakon sačuvanja energije jedino je uvjetovan zatvorenošću, ili kako smo to preciznije zvali *konzervativnošću*, sistema jer nije bilo izmjene topline¹³. U svakom slučaju za zakon sačuvanja energije postavljali smo samo jedan uvjet *zatvorenost*.

Zakon sačuvanja energije ne zahtjeva da dijelovi od kojih se sastoji sistem, svaki za sebe, ostaju nepromijenjeni i imaju stalnu energiju. I mehanički rad i izmjena topline je moguća između tih dijelova. Ono što zakon zabranjuje je narušenje iznosa ukupne energije na razini sistema kao cjeline ukoliko nema međudjelovanja i nema izmjene topline s okolinom.

Možemo se zapitati što je s masom. U Newtonovoj mehanici, dakle dok smo u području fenomena koji uključuju brzine znatno manje od brzine svjetlosti, zakon sačuvanja mase vrijedi i nezvan je s *zakonom sačuvanja energije*. U relativističkoj fizici vrijedi kao izravna posljedica zakona sačuvanja energije tvrdnja:

Relativistička masa zatvorenog i adijabatski izoliranog sistema je stalna.

¹²Ako biste fizičarima predložili teoriju koja opisuje prirodu veličinama razumljivih postojećim aparatom fizike, a koji nije u skladu s ovim zakonom, najblaže rečeno, ne biste imali potporu zajednice.

¹³Ova tvrdnja nije sasvim točna jer smo se bavili i disipativnim sistemima kao što je fenomen trenja klizanja koji je povezan s konverzijom rada u toplinu. Ipak sasvim smo precizno naznačili da takvi sistemi nisu konzervativni.

Ovo je jednostavna posljedica *zakona sačuvanja energije* jer je relativistička masa proporcionalna relativističkoj energiji. Ovo je razlog da često govorimo o ujedinenom zakonu sačuvanja mase i energije.

Pitanje mase mirovanja je znatno kompliciranije i općenito možemo reći da ona nije sačuvana u procesima koji se odvijaju na vrlo visokim energijama poput termonuklearnih reakcija (vidi odjeljak 2.5.1 na strani 33). Bez obzira na složenost ovih fenomena termodinamika kao formalizam "preživljava" ovaj test i nezaobilazna je u primjeni i na sistemima u kojima se odvijaju nuklearni procesi kao što su nuklearne elektrane ili zvižde.

2.5.4 Procesi u idealnom plinu

Unutrašnja energija idealnog plina je potpuno određena apsolutnom temperaturom i ne ovisi o procesu kojim se plin našao u konačnom stanju. Promjena unutrašnje energija idealnog monoatomnog plina je dana s

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk\Delta T \quad (5.6)$$

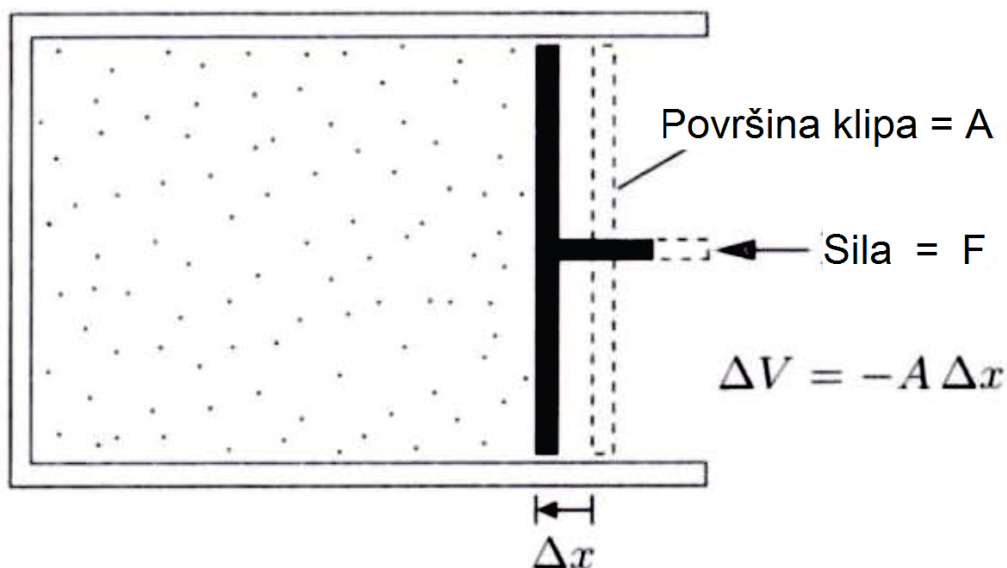
za *bilo koji* proces. Ova neovisnost vrijednosti unutrašnje energije o procesu se iskazuje fizikalnom tvrdnjom da je unutrašnja energija funkcija stanja sistema i ima u određenom stanju¹⁴ uvijek istu vrijednost.

Rad pri stlačivanju

Promotrimo standardni eksperiment u razmatranjima o radu plina u procesima širenja i skupljanja. Neka je kao na sl. 5.1 određena količina idealnog plina zatočena u nepropusnu posudu gdje je jedna od šest strana pokretni klip. Ako klip tlači plin prema prikazanom rad koji obavlja protiv vanjskih sila je

$$\Delta W = P\Delta x = P\Delta V \quad (5.7)$$

¹⁴Matematički se stanje zadaje potpunim skupom termodinamičkih parametara, a u slučaju idealnog plina to mogu biti tlak, temperatura i broj molekula.



Slika 5.1: Pri pomicanju klipa ulijevo za vrlo mali iznos u kvazistatičnom procesu rad obavljen na plinu je $P\Delta V$ gdje je $\Delta V < 0$.

gdje je u ovom slučaju ovaj izraz negativan jer je $\Delta V < 0$, vanjske sile obavljaju rad nad plinom. Pri širenju rad je pozitivna¹⁵ veličina $\Delta V > 0$ jer plin obavlja rad protiv vanjskih sila.

Specifična toplina

Promjena unutrašnje energije idealnog plina (5.6) što možemo uvrstiti u prvi zakon termodinamike i dobiti za monoatomni idealni plin

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}Nk\Delta T + W \quad (5.8)$$

Iz ovog izraza je jasno da sasvim općenito možemo reći da izmjena topline u plinu ima dva doprinosa

1. promjena unutrašnje energije ΔU koja ovisi samo o početnom i konačnom stanju plina

¹⁵Ovdje je dobro napomenuti da je pogrešan predznak veličina u računima čest uzrok pogrešnih rezultata i prije nego što smo obavili prvu računsku operaciju. Vrlo je važno da su sve veličine ispravno unešene u matematičke izraze, s točnim predznakom, a to je ovdje često jednostavno utvrditi provjerom da li pretpostavljeni predznak ima fizikalnog smisla. Primjer je slučaj rada vanjske sile nad plinom gdje je jasno da doprinos rada unutrašnjoj energiji mora biti pozitivan.

2. rad W koji, naravno, ovisi o značajkama procesa kojim je plin preveden iz početnog u konačno stanje

Prirodno i izmijenjena toplina ovisi o procesu, a ne samo o početnom i konačnom stanju plina.

Ovo razmatranje možemo izreći vrlo važnom činjenicom termodinamičkog pojmovnika *toplina i rad su kvantitativne značajke procesa, a ne stanja sistema*. Fizikalno, kao što nema smisla tvrdnja u sistemu je pohranjena količina rada W , nema smisla niti tvrdnja u sistemu je pohranjena količina topline Q . Ovo je razlog da je fizikalno tvrdnja da sistem ima iznos X "toplinske energije"¹⁶ besmislena.

Izohorni proces

Uvrštenje stalnosti volumena za monoatomni idealni plin u prvi zakon daje

$$Q_V = \Delta U = \frac{3}{2} N k \Delta T \quad (5.9)$$

Pogodno je definirati specifični toplinski kapacitet pri stalnom volumenu

$$c_V = \frac{Q_V}{m \Delta T} = \frac{3}{2} \frac{k}{m/N} \quad (5.10)$$

ili koristeći se definicijom mase mola tvari $M = N_A m/N$

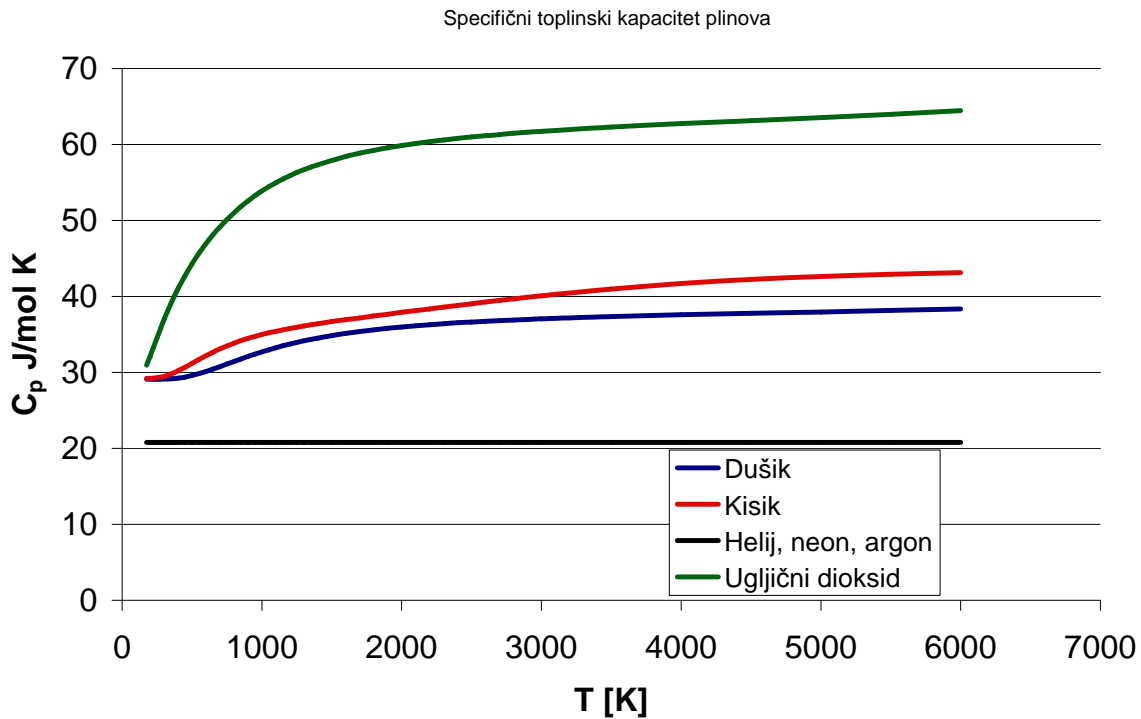
$$C_{mV} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R \quad (5.11)$$

ovaj rezultat se vrlo dobro slaže s eksperimentalnim rezultatima za monoatomne plinove preko iznimno velikog raspona temperatura.

Bez dublje analize navodimo da je klasični rezultat za specifični toplinski kapacitet dvoatomnog plina

$$C_{mV} = \frac{5}{2} N_A k = \frac{5}{2} R \quad (5.12)$$

¹⁶Čest pojam u literaturi o energiji. Nobelovac prof. R. Laughlin je napisao knjigu "Powering the Future" motiviran razmjerima neznanstvenog pristupa temi energije u javnosti. Više možete pronaći na njegovoj web stranici <http://large.stanford.edu/publications/power/sveučilištaStanford>.



Slika 5.2: Specifični toplinski kapacitet plinova preko velikog raspona temperatura. Podatci su preuzeti s <http://www.engineeringtoolbox.com/>.

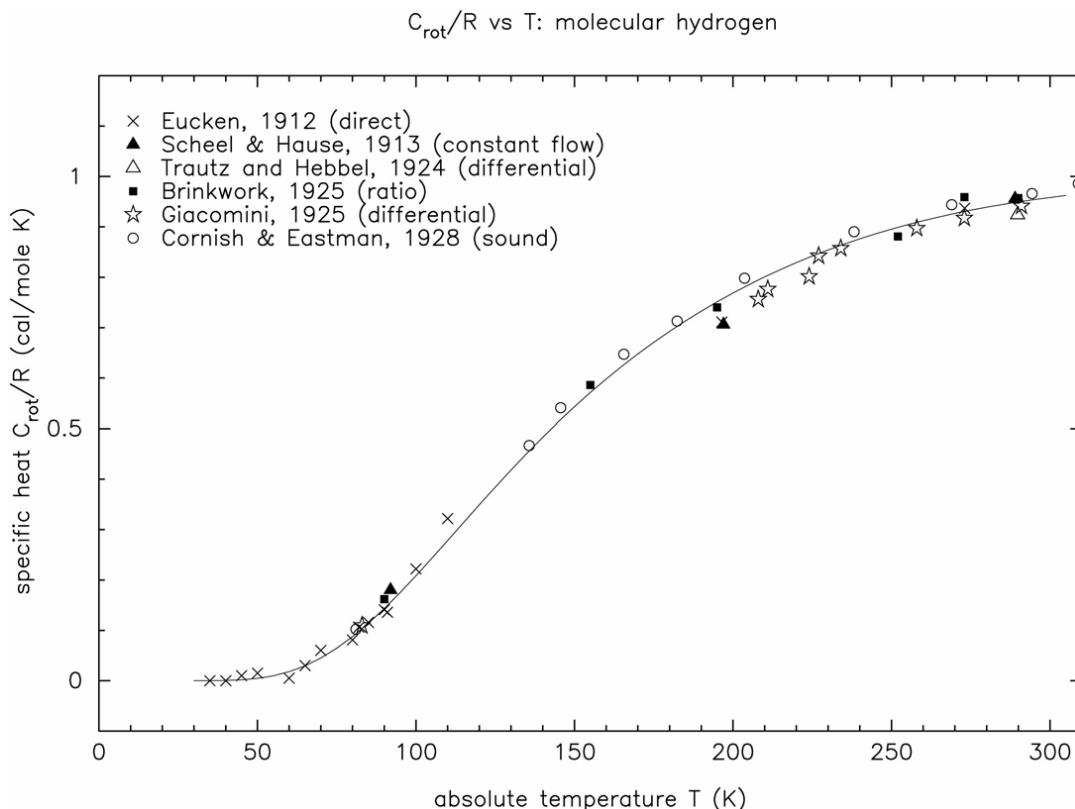
gdje se pretpostavlja da osim translatornog gibanja može obavljati i vrtnju oko dvije osi. Napominjemo da ovdje nema dobrog slaganja s eksperimentom kao kod monoatomnih plinova kao što je vidljivo na slici 5.2. Fizikalno gledano klasičnim očima molekula bi mogla i vibrirati, ali kada bismo joj još i to "dozvolili" rezultat bi bio u još većem neslaganju s eksperimentom za širok raspon temperatura (čak do 1200 K). Eksperimentalni rezultati, koji su bili velika zagonetka fizike početka 20. stoljeća, ističu sljedećih nekoliko pitanja:

1. Zašto toplinski kapacitet dvoatomnih¹⁷ rastu?
2. Zašto na niskim temperaturama toplinski kapacitet vodika odgovara kapacitetu jednoatomnih plinova, a ne vrijednosti na višim temperaturama (vidi sliku 5.2)?
3. Zašto se smanjenje toplinskog kapaciteta ne uočava kod kisika i ostalih prikazanih višeatomnih plinova?

¹⁷I općenito poliatomnih plinova kao što je amonijak.

4. Zašto se ne uočava doprinos vibracija molekula?

Elegantno rješenje navedenih problema i niza drugih koji su se nagomilali na prijelazu 19. u 20. stoljeće uspješno je razriješila kvantna teorija, a ponašanje specifičnog toplinskog kapaciteta je rijetka makroskopska manifestacija kvantne prirode tvari¹⁸.



Slika 5.3: *Specifični toplinski kapacitet vrtnje H₂ molekule. Povijesno važna mjerenja koja su utrla put kvantnoj teoriji.*

Izobarni proces

Uvrštenje stalnosti tlaka za monoatomni idealni plin u izraz za rad daje

$$W_p = p\Delta V = Nk\Delta T \quad (5.13)$$

¹⁸Kvantna priroda svijeta koji neposredno opažamo je obično duboko potisnuta i nije ju jednostavno mjeriti.

Prvi zakon termodinamike poprima sljedeći oblik

$$Q_P = \Delta U + W_P = \frac{3}{2}Nk\Delta T + Nk\Delta T \quad (5.14)$$

Iz ovog rezultata možemo zaključiti da je za izobarni proces potrebna izmjena više topline nego u slučaju izohornog procesa. Ovo je očekivani rezultat obzirom da u slučaju izohornog procesa nema obavljanja rada povezanoga s promjenom volumena plina.

Jasno prema prethodnom rezultatu specifični toplinski kapacitet pri stalnom tlaku je veći od c_V dan u (5.10).

$$c_P = \frac{Q_P}{m\Delta T} = \frac{5}{2} \frac{k}{m/N} \quad (5.15)$$

ili koristeći se definicijom mase mola tvari $M = N_A m/N$

$$C_{mP} = \frac{5}{2} N_A k = \frac{5}{2} R \quad (5.16)$$

Možemo primijetiti da vrijedi sljedeća relacija za molarne toplinske kapacitete

$$C_{mP} = c_V + R \quad (5.17)$$

Pokazuje se da je u računima pogodno definirati omjer toplinskih kapaciteta

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (5.18)$$

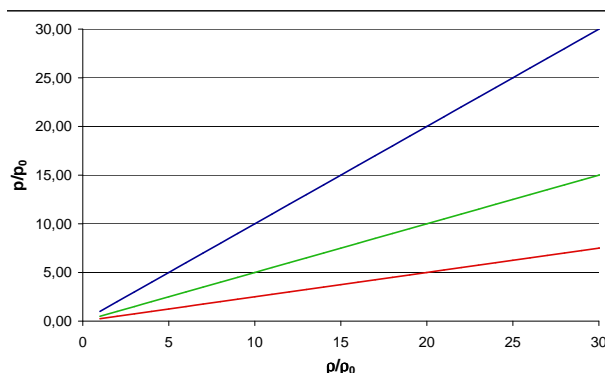
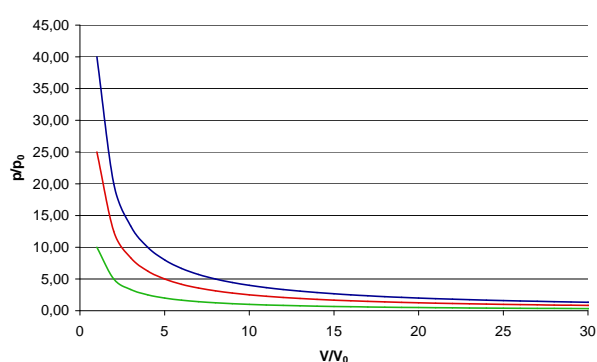
koji se, iz razloga koji ćemo vidjeti kasnije, ponekada naziva i adijabatski eksponent.

Izotermalni proces

To je proces koji se odvija pri stalnoj temperaturi. Odnos tlaka i volumena daje Boyle-Mariotteov zakon

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

prikazan grafički na slikama 5.4 i 5.5. Pokazuje se da za realne plinove ovaj zakon vrijedi pri visokim temperaturama (sobna) i tlakovima koji su manji od tridesetak atmosfera unutar 1 do 3 %. Pri visokim tlakovima od stotinu atmosfera odstupanja postaju



Slika 5.4: Boyle-Mariotteov tlak p i volumen V . Slika 5.5: Boyle-Mariotteov zakon tlak p i gustoća ρ .

značajna. Ovi eksperimenti nas upućuju da plin možemo smatrati idealnim ukoliko je u izotermalnom procesu tlak obrnuto proporcionalan volumenu za zadanu količinu plina. *Idealni plin* je samo fizikalni koncept pojednostavljenja kao i točkaste čestice, naboji ili savršene kružne putanje. Pokazuje se da su ovakve idealizacije vrlo moćni alati u fizikalnom opisivanju složenih prirodnih fenomena jer često omogućavaju jednostavan uvid u mehanizme procesa bez značajnijeg narušavanja točnosti predviđanja. Ipak treba reći da je za uspješnu primjenu ovakvih idealiziranih modela potreban je jasan fizikalni uvid u realni problem što obično uključuje i solidno iskustvo u primjeni fizičkih zakona.

Rad koji plin obavlja u izotermalnom procesu je površina ispod hiperbola na sl. 5.4. Elementarnim postupkom nije moguće izračunati rad, odnosno površinu. Točan odgovor daje primjena integralnoga računa tako da iznosimo rezultat bez dokaza

$$W_T = NkT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5.19)$$

Usput spomenimo da univerzalna numerička tehnika podjele površine ispod krivulje na dovoljno uske pravokutnike omogućava približno računanje površine elementarnim računom bez obzira na složenost krivulje.

Unutrašnja energija idealnog plina se ne mijenja u izotermalnom procesu, kao što pokazuje izraz (5.6), ali to ne znači da ne postoji toplinska izmjena što je česta pogreška u zaključivanju zbog stalne temperature. Prvi zakon termodinamike zapravo daje

$$Q_T = W_T$$

što znači da je u izotermalnom procesu nužna izmjena topline koja kompenzira doprinos rada te održava unutrašnju energiju stalnom tijekom procesa.

Obzirom da se u izotermalnom procesu toplina izmjenjuje pri stalnoj temperaturi specifični toplinski kapacitet pri izotermnom procesu nema smisla kao što se vidi iz definicije (3.1). Za procese koji su bliski izotermalnom toplinski kapacitet je vrlo velik.

Adijabatski proces

Kao što je navedeno u razmatranjima odjeljka 2.5.3 adijabatski proces se odvija u sistemu koji je izoliran od okoline pa nema izmjene topline $Q_{\text{ad}} = 0$. Jasno da je prema tome toplinski kapacitet u adijabatskom procesu nula.

Praktično takav proces realiziramo termalnim izoliranjem sistema od okoline kao što je slučaj u kalorimetrijskim mjerenjima (Dewarova posuda). Postoji još jedna vrlo važna mogućnost realizacije, a sastoji se u postizanju velike razlike u vremenskoj skali izmjene topline i širenja/skupljanja plina. U stvari te dvije skale su prirodno odvojene u nizu procesa jer je izmjena topline općenito vrlo spor proces, često izmjena topline traje vrijeme nekoliko redova veličine dulje od tipičnih vremena promjene volumena. Ovo ćemo iskoristiti u proučavanju valova zvuka u odjeljku 3.6 iako to nipošto nije jedina primjena ovog približenja.

U adijabatskom širenju plin obavlja rad na uštrb smanjenja vlastite unutrašnje energije. Suprotno širenju pri stlačivanju plina unutrašnja energija raste za iznos određen radom vanjskih sila. Ako se prisjetimo da unutrašnja energija idealnog plina ovisi samo o apsolutnoj temperaturi zaključujemo da *temperatura idealnog plina raste tijekom adijabatskog tlačenja, a opada tijekom širenja*.

Ova značajka procesa ima vrlo široku primjenu. Ako izolirani spremnik napunjen ugljičnim dioksidom pod visokim tlakom (oko 40 atm) naglo - gotovo adijabatski - dekomprimiramo otvaranjem ventila na spremniku. Pokazuje se da temperatura tvari u tom procesu spusti na oko -80°C pri čemu se dio plina faznom pretvorbom prevede u kristalno stanje slično snijegu. Takvu tvar nakon kompaktifikacije nazivamo *suhi led*.

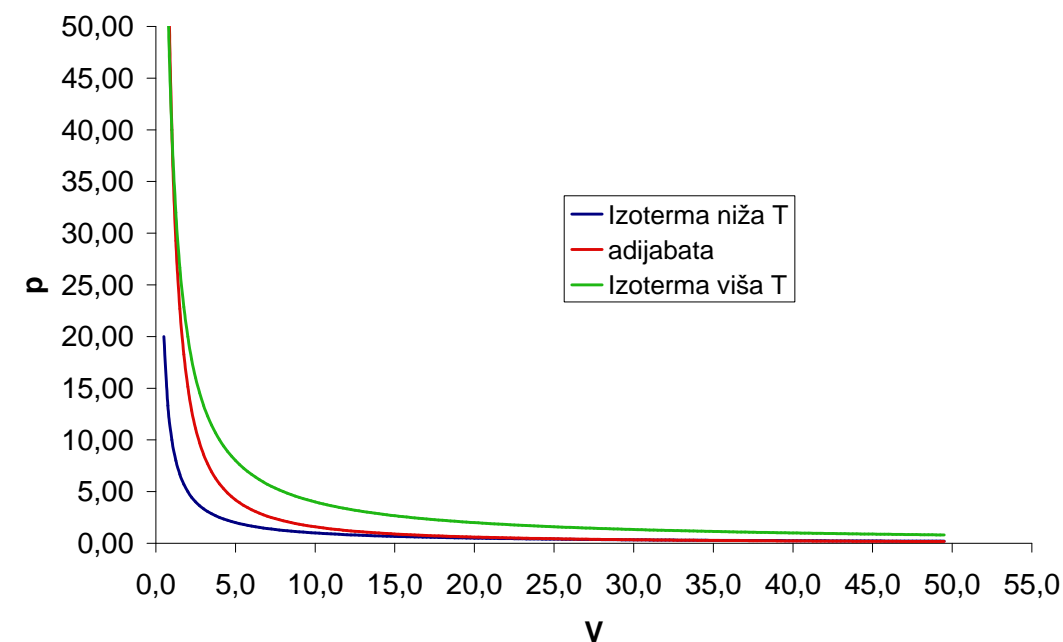
Sljedeća važna primjena je u motorima s unutrašnjim sagorijevanjem. Uzmimo pri-

mjer proces rada dizelskih motora u kojem je vitalni dio gotovo savršena adijabatska kompresija zraka pri kojoj se temperatura povisi i do 700°C . U tako stlačeni zrak se visokotlačnim pumpama ubrizga određena količina goriva koje se u tim termodinamičkim uvjetima samozapali. Tijekom izgaranja dolazi do pretvorbe kemijske energije (vidi odjeljak 2.5.1) u mehanički rad i višak topline koji su glavne značajke rada dizelskih motora.

Obzirom da nema izmjene topline korištenjem izraza za promjenu unutrašnje energije (5.8) jednoatomnog plina dobivamo

$$W_{\text{ad}} = \frac{3}{2}Nk(T_1 - T_2) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} \quad (5.20)$$

gdje je s 1 označeno početno, a s 2 konačno stanje sistema.



Slika 5.6: Odnos izotermnih i adijabatskog procesa u pV dijagramu.

Bez dokaza navodimo nekoliko važnih relacija koje opisuju odnose termodinamičkih parametara tijekom adijabatskog procesa

$$\text{konst} = pV^{\gamma}, \quad \text{konst} = TV^{\gamma-1} \quad (5.21)$$

Na slici 5.6 je prikazan odnos izotermnog i adijabatskog procesa na kojem se vidi da ukoliko usporedimo adijabatski i izotermni proces širenja koji kreće iz istog stanja plin u adijabatskom procesu obavlja manji rad (prisjetimo se da je rad površina ispod krivulje procesa u pV dijagramu). Suprotno, ukoliko promatramo kompresiju iz nekog početnog stanja vanjske sile obavljaju veći rad nad plinom u adijabatskom nego u izotermnom procesu.

2.6 Drugi zakon termodinamike

U dosadašnjim razmatranjima govorilo se o tlaku, temperaturi, gustoći, unutrašnjoj energiji. Prešutno se pretpostavljalo da svi termodinamički parametri, kako smo ih zvali, imaju određenu vrijednost u svim dijelovima volumena. Promatrali smo niz procesa, ali nismo odgovorili na osnovno pitanje koje je tema proučavanja fenomena topline. Pitanje se može lijepo predstaviti osnovnom pretpostavkom izvođenja kalorimetrijskog eksperimenta određivanja toplinskog kapaciteta opisanoga u odjeljku 2.3. U kalorimetrijskom eksperimentu nije nas brinulo da krene u "krivo" na način da se nakon uranjanja grijača u hladnu vodu grijač dodatno ugrije od hladne vode, a ona dodatno ohladi. Ova "zabrinutost" zvuči bizarno, ali pažljivo razmatranje pokazuje da u do sada iznesenim zakonima fizike nema ničega što bi zabranilo takav scenarij. Prvi zakon termodinamike 2.5.2 sigurno ne zabranjuje ovakav proces. Sve što on zahtijeva je da termalna energija koju grijač primi od vode ima isti iznos onoj koju je hladna voda izgubila. Newtonovi zakoni su vremenski invarijantni tako da svaki proces koji predviđaju znači da je s njima usklađen i proces koji se dobije "obrtnjem" smjera protoka vremena¹⁹. Ova pitanja su bila ozbiljan problem i predmet opširnih debata fizike druge polovine 19. stoljeća. Danas znamo da prvi zakon termodinamike dozvoljava procese koje u laboratoriju ne opažamo, ali postoji dodatni zakon koji se naziva *drugi zakon termodinamike* uz koji se poput ukupne unutrašnje energije u *prvom zakonu* uvodi dodatna funkcija stanja *entropija* koji obavlja konačnu selekciju mogućih procesa. Da bismo mogli kvantitativno opisati ove fenomene i razumjeti fizikalnu pozadinu *entropije* potrebno je uvesti nekoliko

¹⁹Ako priredimo i snimimo proces sudaranja 50 biljarskih i film zatim obrnuto, od kraja prema početku, presnimimo u novi. Postavimo li pitanje osobi koja nije gledala snimanje i ne zna koji je film "stvarni", a koji obrnuti da to odredi koristeći zakone fizike. Ispostavlja se da ona ne može sa sigurnošću odgovoriti na pitanje koji film odgovara stvarnom procesu koji je sniman bez obzira na poznavanje fizike i dostupnost računskih mogućnosti. Oba filma predstavljaju mogući proces.

pojmovi koji su važni za formuliranje dodatnog zakona koji "uređuje" ova pitanja.

2.6.1 Kvizistatični procesi

Pretpostavka da svi termodinamički parametri imaju istu vrijednost u bilo kojoj točki volumena može vrijediti samo ukoliko je sistem u ravnotežnom stanju. Ako promotrimo jednostavni sistem prikazan na slici. 5.1 i vanjskom silom pomaknemo klip za mali iznos Δx plin uz površinu klipa će se komprimirati pri čemu će u tom području lokalno porast gustoća i temperatura. Sistem se nakon kompresije nalazi neko vrijeme u neravnotežnom stanju jer je potrebno određeno vrijeme da se vrijednosti termodinamičkih parametara izjednače poprimajući nove vrijednosti. Vrijeme potrebno za ponovno uravnoteženje naziva se *vrijeme relaksacije* i karakteristika je danog sistema.

Ako kompresiju klipom za vrlo mali Δx obavimo tako sporo da je vrijeme kompresije znatno veće od *vremena relaksacije* Nazovimo ovakav proces mikrokompresija. Jasno je da konačnu kompresiju možemo predstaviti kao niz takvih mikrokompresija, a sudbinu sistema tijekom kompresije kao prolazak kroz niz ravnotežnih stanja. Takve procese ćemo zvati *kvizistatični*. Izohorne, izobarne i izotermne procese je jednostavno eksperimentalno izvesti tako da odgovaraju značajkama *kvizistatičnog procesa* do željene, unaprijed zadane, točnosti. Procese možemo obavljati po volji sporo u maloj posudi sa stijenkama visoke toplinske vodljivosti.

Znatno je teže realizirati kvizistatični adijabatski proces. Mora se izvesti dovoljno brzo da bismo mogli pretpostaviti da nije došlo do znatnije izmjene topline, ali i dovoljno sporo da je vrijeme znatno manje od relaksacijskog vremena u sistemu. Jasno je da su to dva suprotstavljena zahtijeva tako da realni procesi mogu samo približno odgovarati adijabatskom kvizistatičnom procesu.

Napomenimo da krivulje u pV ili pT dijagramu predstavljaju samo *kvizistatične procese* jer točke u njima predstavljaju ravnotežna stanja sistema gdje vrijednosti termodinamičkih parametara ne ovise o točki sistema. Može se krivo pomisliti da će "upotrebljivost" fizikalne teorije zasnovane na ovako idealiziranim sistemima biti vrlo ograničena uzimajući u obzir da su realni procesi obično vrlo daleko od kvizistatičnosti. Stvarnost je potpuno suprotna, a termodinamika je jedno od dostignuća fizike koje je uspješno

preživjelo enormne konceptijske promjene u našem shvaćanju prirode u posljednjih 150 godina te se uspješno primjenjuje na gotovo SVA tehnološka dostignuća. Zapravo se iznimno mali broj tehnologija koje smo razvili ne zasniva na termodinamici.

2.6.2 Ireverzibilnost

Reverzibilni proces iz nekoga stanja A u stanje B je onaj koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. može se odvijati bez teškoća u oba smjera $A \rightarrow B$ ili $B \rightarrow A$;
2. u oba smjera odvijanja procesa sistem prolazi kroz isti skup međustanja;
3. nakon uzastopnog odvijanja procesa $A \rightarrow B$ pa $B \rightarrow A$ sistem je u početnom stanju A ;

Ako u nekom procesu nije zadovoljen bilo koji od navedenih uvjeta kažemo da je *ireverzibilan*.

Kao primjer *reverzibilnih procesa* možemo se prisjetiti mehaničkih sistema u kojima djeluju samo *konzervativne sile*. Primjer je harmoničko titranje tijela na savršeno elastičnoj opruzi u vakuumu.

Analizom možemo pokazati da su svi *reverzibilni termalni procesi kvazistatični*. Spomenuti *kvazistatični i reverzibilni procesi* su krajnje idealizacije realnih procesa jer se svi procesi odvijaju konačnom brzinom, a ne po volji sporo. Možemo zaključiti sljedeće: *svi realni procesi su ireverzibilni*. *Reverzibilni procesi* zauzimaju posebno mjesto u termalnoj fizici jer postavljaju ograničenja, poput zakona sačuvanja, što je realno moguće. Dodatna prednost je daleko jednostavniji matematički aparat²⁰ koji je potreban za kvantitativnu analizu za razliku od *ireverzibilnih procesa* jer su sve sile koje djeluju u sistemu gotovo u ravnoteži tako da se sistem u niti jednom trenutku znatno ne udaljava od ravnotežnog stanja.

²⁰U fizici smo navikli na ovakve idealizacije jer je upravo mogućnost pojednostavljenja nevjerovatne kompleksnosti univerzuma razlog postojanja današnje fizike.

Ako dvije posude s različitim plinovima spojimo i time omogućimo miješanje procesom difuzije koncentracije se, u sada zajedničkom volumenu, spontano izjednačavaju bez vanjskog utjecaja. Kada se proces završi ma koliko čekali nećemo opaziti da se mješavina ponovno razdvoji u početno stanje. Mi svakako poznajemo tehnike kojima možemo prisiliti razdvajanje plinova, ali pri tom postupku sistem neće proći kroz isti niz stanja kao tijekom difuzije. Razdvajanje je zapravo nemoguće provesti ukoliko značajno ne promijenimo okolinu sistema jer je potrebno koristiti dodatnu energiju za pogon separacijskih crpki. Kada u solanama obavljaju separaciju soli iz otopine (morska voda) koristi se iznimno velik iznos topline koju najčešće dobivamo od Sunca. Difuzija je jednosmjernan ireverzibilni proces. Isto vrijedi za toplinsku izmjenu pri konačnoj razlici temperatura tijela u dodiru. Sljedeći primjer su mehanički neelastični srazovi i trenje. Relativno klizanje površina čvrstih tvari u dodiru povećava njihovu temperaturu pa prema tome i unutrašnju energiju. Bez obzira koliko čekali, obrnuti proces, spontanu pretvorbu unutrašnje energije u mehanički rad.

2.6.3 Statistička priroda termodinamike

Ireverzibilnost termalnih procesa je zbunjivala znanstvenike dugi niz godina posebno u drugoj polovici 19.st.²¹, a sadržaj problema se može izreći na sljedeći način: u krajnjem razlaganju termalnih procesa dolazimo do gibanja i međudjelovanja molekula, dakle mehaničkih sistema koji su reverzibilni kako je opisano u uvodu na strani 46 ili prethodnom odjeljku u slučaju miješanja dva različita plina. Prividnu proturječnost makroskopske ireverzibilnosti i pripadne mikroskopske reverzibilnosti u analizi moguće je riješiti statističkim razmatranjima kojima su čovječanstvo zadužili fizičari J. C. Maxwell i L. Boltzmann. Ovdje se čini pristojno citirati J. C. Maxwella da bismo shvatili što izdvaja genija od ostatka populacije. Dakle u članku iz 1878.god. [Max78], kada se o molekularnoj građi tvari zna manje od današnjeg poznavanja crnih rupa, prof. Maxwell nam objašnjava statističku prirodu *drugog zakona termodinamike* koji objašnjava zašto se difuzijom izmiješana dva plina spontano neće razdvojiti u polazno stanje u kojem se nalaze u zasebnim dijelovima zajedničkog volumena (kako je opisno u prethodnom odjeljku)

²¹Realnost je još zanimljivija jer veliki broj publikacija na ovu temu najvećih eksperata ("svježa" razmatranja se mogu pronaći u [Leb93], [Jay98], [LY00] i reference u njima) fizike u ovom području koji neprekidno traje više od stotinu godina jasno ukazuje da slučaj još uvijek nije u stanju "case closed".

Hence the Second Law of thermodynamics is continually being violated and that to a considerable extent in any sufficiently small group of molecules belonging to any real body. As the number of molecules in the group is increased, the deviations from the mean of the whole become smaller and less frequent; and when the number is increased till the group includes a sensible portion of the body, the probability of a measurable variation from the mean occurring in a finite number of years becomes so small that it may be regarded as practically an impossibility.

Tekstu se ni danas nema što dodati. U ovom opisu je ispravno anticipirano nekoliko otkrića na čiju potvrdu će se čekati još nekoliko desetljeća: molekularna struktura tvari, primjena statistike na makroskopske sisteme gledano s mikroskopske razine međudjelovanja molekula te ispravna rekonstrukcija makroskopskog ponašanja tijela korištenjem granice mnoštva čestica i kompleksnosti sistema.

Da bismo krenuli dalje potrebno je definirati dva važna pojma u statističkoj fizici, naziv područja fizike zaduženoga za povezivanje mikrosvijeta i fenomena s uzorcima tvari koje praktično susrećemo²², a to su:

mikrostanje popis u kojem je dostupna kompletna, u principu moguća, informacija o sistemu²³.

makrostanje uz zadane vanjske uvjete skup mikrostanja koja imaju zajedničku jednu ili više značajki, poput broja molekula (N), energije(E) i volumena (V)²⁴

U definiranju makrostanja sistema s mnoštvom molekula ignoriramo kompleksnost na mikrorazini, a opis zasnivamo na ukupnim vrijednostima ili prosjeku fizičkih veličina koje su nam važne. Primjerice, pokazat će se da je srednja kinetička energija molekule u plinu važna makroskopska veličina.

²²Misli se na sisteme koji sadrže veliki broj molekula.

²³Za opis neke količine plina sa stajališta Newtonove mehanike odgovara poznavanju položaja i impulsa *svih* molekula u svakom trenutku.

²⁴Primijetite da za dane (N,E,V,p) u tipičnom uzorku plina, recimo 1 cm^3 , pri standardnim uvjetima tlaka i temperature postoji enormni broj mogućih mikrostanja, praktično nedostupnih mjerenju, koja imaju upravo zadane vrijednosti fizikalnih veličina (N,E,V,p) kojima opisujemo sistem. Kvantitativno ćemo se u to uvjeriti u vježbama koje slijede.

Pogledajmo što to znači na jednostavnom primjeru sistema mnoštva čestica. Pokrenite aplikaciju "Statistička interpretacija entropije" s poveznicom na simulaciju. Cilj ove vježbe je kvantitativno provjeriti činjenicu da sistemi mnoštva čestica "dugo borave" u određenim makrostanjima.

Bacanje novčića²⁵

Da bismo stekli uvid u odnos događanja na mikro i makrorazini promatrati ćemo vrlo jednostavan sistem koji se sastoji od određenog broja poredanih kovanica koje bacamo. Ishodi koje možemo očekivati mikroskopski je određeni poredak "glava" (G) i "pisama" (P). Ovakav opis sistema odgovara prije uvedenom konceptu *mikrostanja*, a sasvim se lako uvjeriti da je broj takvih stanja veoma velik već za sistem sa samo 10 novčića. Ako bacamo 100 kovanica ovaj se način opisa sistema čini tegoban i nije ono što bismo obično promatrali. Dodatno ćemo pretpostaviti da je sistem eksperimentalno "pošteno" postavljen tako da je vjerojatnost ostvarenja bilo kojeg mikrostanja jednaka. Pogodnije je gledati stanje kroz ukupni broj "glava" (ili "pisama" svejedno jer je broj novčića unaprijed zadan) koji se u danom mjeranju ostvaruje. Ovakva kategorizacija stanja sistema je upravo prethodno definiran koncept *makrostanja* sistema. Pretpostavljamo da je poredak novčića unaprijed zadan tako da nas ne brine promjena redoslijeda novčića.

Očekivani ishodi učenja nakon uspješno provedenih aktivnosti na ovoj vježbi su

- primijeniti pojam mikro i makrostanja na jednostavni sistem
- objasniti statističku vjerojatnost makrostanja
- kvantitativno obrazložiti opaženu ireverzibilnost na primjeru bacanja novčića s porastom broja kovanica u sistemu

Postepeno povećavanje broja novčića u sistemu će nam pokazati ponašanje sistema koji postaje vrlo kompleksan na način da se broj stanja u kojima se može mikroskopski realizirati enormno povećava.

²⁵Ova je vježba pojednostavljena verzija prve aktivnosti prema [Tim10].

Uzmimo najjednostavniji netrivialan slučaj: dvije kovanice. Ako imamo samo dvije kovanice postoje četiri mikrostanja: GG, GP, PG, PP. Broj makrostanja je 3: (2G,0P), (1G,1P), (0G,2P). U sljedećoj listi navodimo broj mikrostanja koja realiziraju neko makrostanje. Broj mikrostanja koja realiziraju promatrano makrostanje se naziva *multiplicitet* ili termodinamička vjerojatnost i označavamo ga grčkim slovom omega (Ω). Termodinamička vjerojatnost stanja kada je ishod dvije glave i nula pisama označavamo sa $\Omega(2G, 0P)$. $\Omega(\text{ukupno})$ označava ukupni multiplicitet *svih* makrostanja.

$$\Omega(2G, 0P) = 1$$

$$\Omega(1G, 1P) = 2$$

$$\Omega(0G, 2P) = 1$$

$$\Omega(\text{ukupno}) = 4$$

Sada smo spremni za tehničku definiciju entropije u našem sistemu. Entropija određenog makrostanja je prema L. Boltzmannu (1844-1907) dana s logaritmom termodinamičke vjerojatnosti

$$S = \ln \Omega \quad (6.1)$$

Izraz je vrlo jednostavan, jedino je potrebno znati što je prirodni logaritam $\ln(x)$, a ta je elementarna funkcija ugrađena u gotovo svaki znanstveni kalkulator. Ovdje se predlaže da se ponove osnovne značajke, a važno je da bez problema možete nacrtati graf prirodnog logaritma. Izraz koji se koristi u standardnom prikazu statističke fizike je $S = k_B \ln \Omega$ gdje je k_B *Boltzmannova konstanta*. On je prilagođen povezivanju ove definicije entropije i termodinamičke entropije gdje $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K osigurava mjerenje entropije u istim jedinicama. Obzirom da se u ovoj aktivnosti upoznajemo s fizikalnom pozadinom ove veličine odabiremo mjerne jedinice gdje je $k_B = 1$. Kasnije ćemo se vratiti na različite načine računanja entropije i njihovu povezanost.

Da biste se približili ovom načinu razmišljanja odradite sljedeće vježbe.

1. Odredite entropiju koristeći izraz (6.1) za makrostanja koja smo dobili bacanjem dva novčića prikazana u listi 2.6.3.



(a) 50 kovanica.

(b) 100 kovanica.

Slika 6.1: Aplikacija za proučavanje entropije. (Desno) Aplikacija za proučavanje entropije sa 100 kovanica nakon 1101 bacanja.

2. Odredite vjerojatnost da nasumično odabrano mikrostanje odgovara nekom makrostanju, npr (1G,1P). Odredite vjerojatnost za sva makrostanja i upišite u

$$P(2G, 0P) = \Omega(2G, 0P)/\Omega(\text{ukupno}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(1G, 1P) = \Omega(1G, 1P)/\Omega(\text{ukupno}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

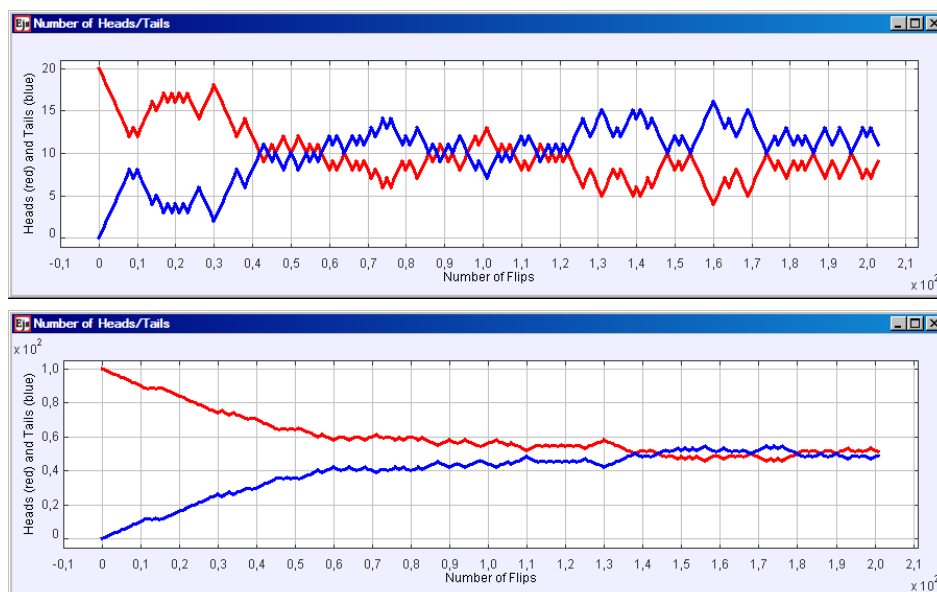
$$P(0G, 2P) = \Omega(0G, 2P)/\Omega(\text{ukupno}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Što dobijete ukoliko zbrojite dobivene vjerojatnosti? Da li ste to očekivali?

3. Ponovite postupak, ali sada za 3 kovanice te unesite rezultate u sljedeću tablicu:

Makrostanje	Multiplicitet (Ω)	Entropija ($S = \ln \Omega$)	Vjerojatnost ($P = \Omega/\Omega(\text{ukupno})$)
3G, 0P			
2G, 1P			
1G, 2P			
0G, 3P			
Ukupno		NA	

4. Ponovite postupak, ali sada za 4 kovanice te unesite rezultate u sljedeću tablicu:



Slika 6.2: Broj glava (crveno) i pisama(plavo) u sistemu s 20 (gore) i 100 (dolje) novčića. Primijetite odnos fluktuacija i broja kovanica u sistemu.

Makrostanje	Multiplicitet (Ω)	Entropija ($S = \ln \Omega$)	Vjerojatnost ($P = \Omega / \Omega(\text{ukupno})$)
4G, 0P			
3G, 1P			
2G, 2P			
1G, 3P			
0G, 4P			
Ukupno		NA	

Primijetite kako je termodinamička vjerojatnost (multiplicitet) relativno velik za stanja gdje je broj glava i pisama podjednak na mikroskopskoj razini.

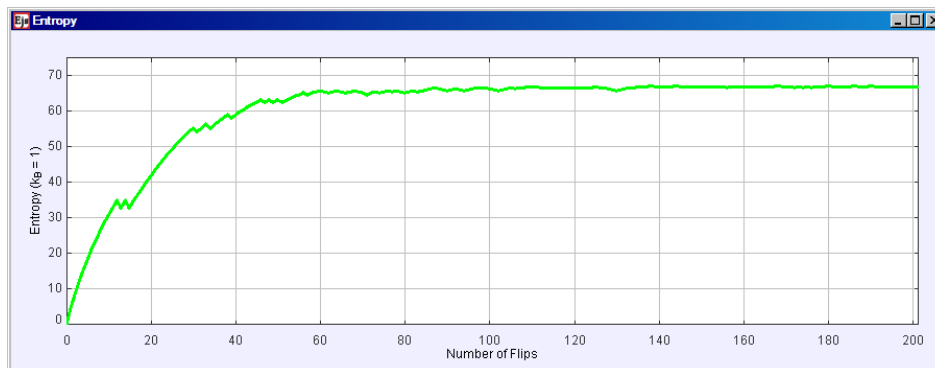
5. Ovdje je pogodno popuniti sljedeću tablicu u eksperimentu sa 100 novčića gdje su multipliciteti već unešeni

Makrostanje	Multiplicitet (Ω)	Entropija ($S = \ln \Omega$)	Vjerojatnost ($P = \Omega/\Omega(\text{ukupno})$)
50G, 50P	4×10^{27}		
53G, 47P	3×10^{27}		
90G, 10P	1×10^{13}		
100G, 0P	1		
Ukupno		NA	

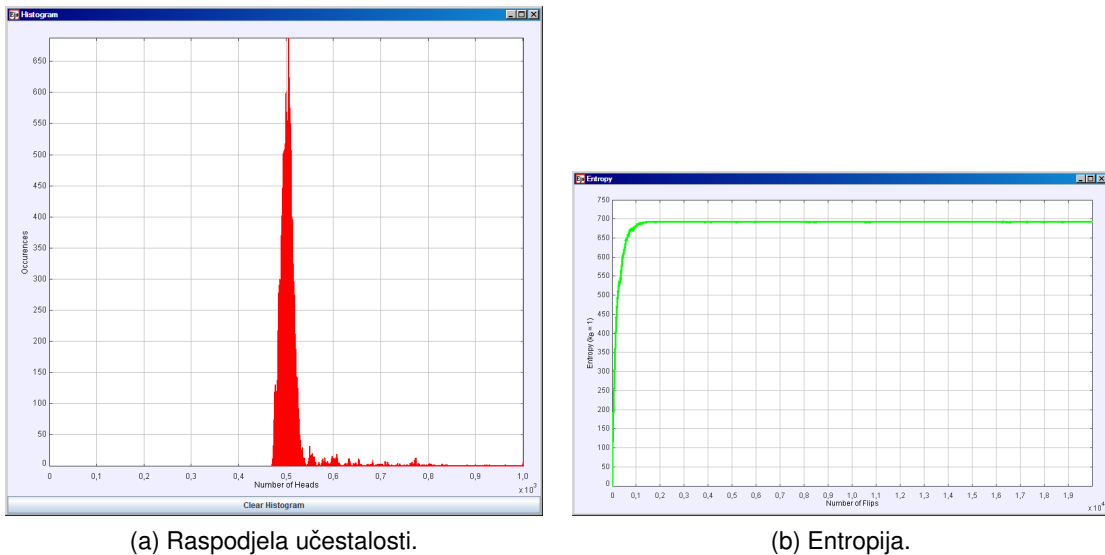
Što možete zaključiti na osnovu obavljenih računa o različitim makrostanjima? Ako biste se kladili kakav će biti ishod u bacanju 100 novčića što biste tvrdili? Primitite da je makrostanje (90G, 10P) "slabo" zastupljeno u odnosu na ukupni broj mikrostanja.

6. U pokrenutoj aplikaciji, odaberite "Part II" te s izbornika lijevo dvaput kliknite na "CoinFlipEquilibrium". Otvoriti će se prozor kao na slici 6.1.

Kao što zorno prikazuju rezultati vježbe *termodinamička vjerojatnost upućuje na smjer odvijanja termalnih procesa*. Slika 6.4 prikazuje raspodjelu učestalosti s kojom se ostvaruje pojedini broj glava (G) za 1000 kovanica i 20000 bacanja. Osnovno što je zanimljivo uočiti je oštar vrh u raspodjeli oko stanja 500 x (G) na prikazu raspodjele i zasićenje krivulje entropije na nekoj maksimalnoj vrijednosti. Dakle već u slučaju



Slika 6.3: Slika prikazuje entropiju koja kreće od vrijednosti 0 za početnu konfiguraciju 100 glava (stanje koje se za 100 novčića može realizirati samo na jedan način pa je $S = \ln 1 = 0$). Nakon velikog broja bacanja entropija se stabilizira na maksimalnoj vrijednosti. Kako imamo "samo" 100 kovanica još se vide fluktuacije oko stanja najveće entropije.

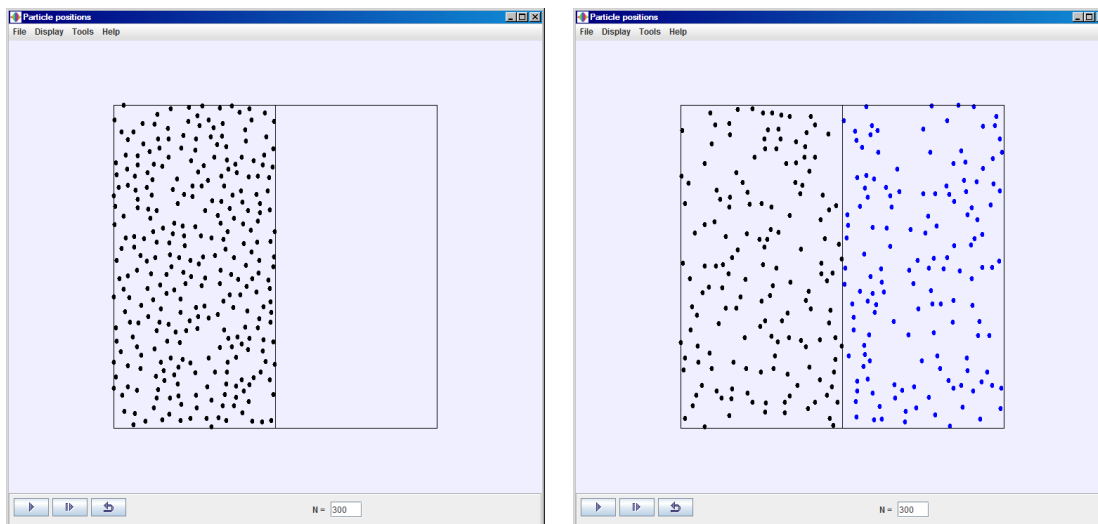


Slika 6.4: (a) Prikaz raspodjele učestalosti makrostanja (broj kovanica koje su u stanju (G)) u eksperimentu bacanja 1000 novčića 20000 puta. (b) Prikaz ovisnosti entropije o rednom broju bacanja novčića.

samo 1000 "molekula" i 20000 "sudara" *termodinamička vjerojatnost* pokazuje svoju moć. Sistem nakon početnog stanja male entropije vrlo brzo dospije u stanje maksimalne entropije i tamo boravi tako dugo vrijeme da možemo sjediti pored kompjutera, ali ipak ne dočekati značajnije smanjenje entropije. Ovo opažanje upućuje na statističku prirodu *ireverzibilnosti* u prirodi, a za ovo objašnjenje fenomena su najzaslužniji fizičari L. Boltzmann i J.C. Maxwell. Odstupanja, vidljiva na slici 6.3 u vrlo malim fluktuacijama entropije, su upravo narušenja na koja je prof. Maxwell upozorio u citatu 2.6.3. U makroskopskim se sistemima *drugi zakon termodinamike* narušava na mikroskopskoj skali njegovih dijelova, ali da opažanje koje uzima prosjeke preko ponašanja sistema kao cjeline koji tipično uključuje 10^{23} molekula to "ne vidi". Preporučuje se ponoviti eksperiment povećavajući postupno broj kovanica i broj bacanja uz promatranje izoštravanja raspodjele oko stanja (500G,500P) maksimalne entropije.

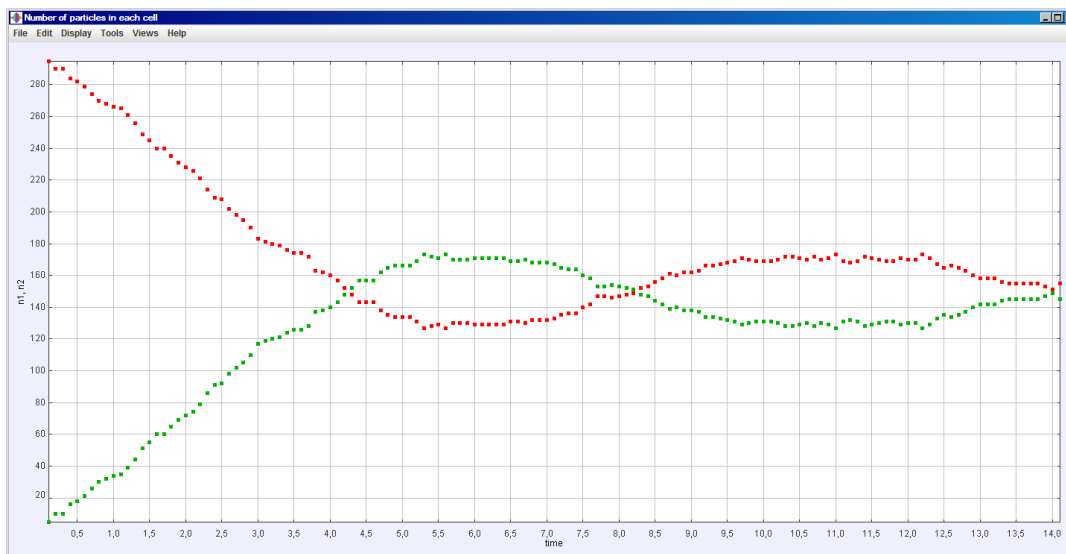
2.6.4 Difuzija

U velikom broju značajki prethodni eksperiment odgovara fenomenu difuzijskog rasprostiranja tijekom ekspanzije plina kojeg prikazuje kompjutorski eksperiment na slici 6.5. Da biste sami promotrili kako razumijemo širenje dvodimenzionalnog plina nakon



(a) Početno stanje.

(b) Nakon protoka vremena.



(c) Broj molekula u dvije polovice ovisno o vremenu.

Slika 6.5: (a) Prikaz raspodjele početne raspodjele 300 molekula. (b) Prikaz raspodjele nakon vremena 15 [jed] u kojem je kao posljedica difuzije ravnomjerno ispunjen čitav dostupni volumen. (c) daje prikaz broja molekula u lijevoj i desnoj polovici.

uklanjanja barijere na polovini volumena pokrenite aplikaciju²⁶ "MDApproachToEquilibriumTwoPartitions" s poveznicom na simulaciju. Aplikacija prikazuje sistem čestica kao funkciju vremena nakon uklanjanja pregrade koja ograničava čestice da dospiju u

²⁶ autori Harvey Gould, Jan Tobochnik, Wolfgang Christian, and Anne Cox, dostupna putem weba na <http://www.compadre.org/OSP> projekta

drugu polovinu. Moguće je mijenjati broj molekula pa se predlaže da korisnik promatra dinamiku za $N=5, 10, 20, 100, 300$. Kao i u prethodnom primjeru s kovanicama uočavamo sljedeće:

1. Nakon nekog vremena sistem ulazi u stanje dinamičke ravnoteže u kojoj veličine koje karakteriziraju makrostanje fluktuiraju oko srednje vrijednosti (broj molekula u polovici ili broj glava kod kovanica).
2. Relativna amplituda tih fluktuacija brzo opada s povećanjem broja molekula ili kovanica. Sistem se s povećanjem kompleksnosti sve više ponaša "termodinamički"
3. Već na, za realne termodinamičke sisteme, malim brojevima molekula sistem koji je ušao u stanje ravnoteže u njemu i ostaje bez obzira koliko čekamo. Ako promatramo simulaciju s 300 molekula, što je zapravo vrlo mali broj, ne možemo dočekati stanje u kojem su sve molekule opet u jednoj polovini. Zapravo ne možemo dočekati niti značajnije odstupanje od ravnotežnog stanja - onog koje realizira najviše mikrostanja.

Razlog *ireverzibilnosti* difuzije u realnim sistemima se jasno vidi u prethodnom eksperimentu. *Termodinamička vjerojatnost* ravnotežnog stanja je nezamislivo veća od onog u kojem je znatno veći broj molekula u lijevoj ili desnoj polovini. Sistem spontano uslijed kompleksne dinamike velikog broja molekula dolazi u najvjerojatnije makrostanje u kojem su molekule plina jednoliko raspodijeljene po cijelom dostupnom volumenu. Suprotan proces u kojem bi se znatni udio velikog broja molekula spontano našao u jednoj od polovina je toliko nevjerojatan da se praktično ne događa. Ovo je osnovna ideja koncepta izloženoga u odjeljku 2.6.3.

2.6.5 Entropija

U ostalim termalnim procesima se koncept *termodinamičke vjerojatnosti* također može primijeniti, ali je analiza tehnički zahtijevna tako da ćemo se ograničiti na kvalitativna razmatranja. Promotrit ćemo pretvorbu mehaničke energije u unutrašnju energiju pri neelastičnom srazu.

Pretpostavimo da se tijelo koje se giba brzinom v neelastično sudari sa zidom. Prije sraza sve molekule tijela imaju "uređenu" kinetičku energiju koja je povezana s gibanjem tijela kao cjeline. Nakon neelastičnog sraza centar mase tijela se zaustavlja, ali se kinetička energija ne gubi. Ona se međudjelovanjem javlja kao porast unutrašnje energije tijela i zida.

$$E_k = U_{\text{poslije}} - U_{\text{prije}} + Q$$

gdje je s E_k dana kinetička energija tijela prije sraza, $U_{\text{poslije}} - U_{\text{prije}}$ je promjena unutrašnje energije tijela, a Q je toplinska energija koja je prenesena na zid, zrak i sl.

Kinetička energija tijela kao cjeline je mehaničke prirode i to stanje je, očito, moguće realizirati kroz samo jedno mikrostanje u kojem se sve molekule gibaju istom brzinom.

Suprotno tome pretvorba ove "organizirane" kinetičke energije u unutrašnju energiju predstavlja prijelaz s uređenoga gibanja u nasumično. Matematičkim aparatom kojim raspolažemo u ovom predmetu nismo u mogućnosti precizno odrediti broj mikrostanja koji odgovara takvom gibanju, ali poučeni jednostavnim primjerima u prethodnim simulacijama i fizikalnom intuicijom jasno je da je taj broj nezamislivo velik prema samo jednom mikrostanju kojem odgovara stanje sistema prije sraza.

Pretvorba mehaničke energije u unutrašnju je prijelaz iz stanja male u stanje ogromne *termodinamičke vjerojatnosti*. Takav proces je spontan, suprotan proces, u kojem se unutrašnja energija pretvara u mehaničku, je toliko nevjerojatan da se praktično nikada ne događa. Slična razmatranja je moguće provesti i kod procesa povezanih s trenjem, zagrijavanjem vodiča električnom strujom ili izmjenom topline.

Zastanimo za trenutak i promotrimo termodinamičke parametre sa stanovišta odnosa prema veličini termodinamičkog sistema. Neka je dana N molekula idealnog plina koji je u ravnotežnom stanju na apsolutnoj temperaturi T , tlaku p , volumenu V i ukupne kinetičke energije molekula energiji E_{kin} . Ako sistem razdijelimo na pola zamišljenom ravninom te se usredotočimo na plin u jednoj polovici. Što se događa s termodinamičkim parametrima? Označimo s "*" vrijednosti za odabranu polovinu plina. Volumen je dan s:

$$V^{(*)} = \frac{V}{2}.$$

Isto možemo zaključiti i za kinetičku energiju i broj molekula

$$E_{\text{kin}}^{(*)} = \frac{E_{\text{kin}}}{2} \quad N^{(*)} = \frac{N}{2}.$$

No s tlakom i temperaturom je drukčije, ove veličine ne ovise o podijeli sistema i imaju istu vrijednost i u dijelovima pa vrijedi:

$$p^{(*)} = p \quad T^{(*)} = T.$$

Ova zapažanja se opisuju pojmom *ekstenzivnosti* tako da se uvodi sljedeća podjela termodinamičkih parametara:

ekstenzivne varijable one koje su proporcionalne veličini sistema

intenzivne varijable one koje su neovisne o veličini sistema pod istim termodinamičkim uvjetima

Ova podjela se pokazuje korisnom u kvantitativnom razmatranju termodinamike omogućavajući jasno formuliranje matematičkog formalizma.

Termodinamička vjerojatnost određuje smjer odvijanja termalnih procesa. Usporedbom vjerojatnosti realizacije dva stanja možemo utvrditi u danim okolnostima koji će se proces odvijati. Pokazuje se da je račun *vjerojatnosti* opterećen velikim tehničkim teškoćama kombinatoričkih računa. Ovo je razlog da se određivanje smjera odvijanja procesa prepušta drukčije definiranoj veličini. Fizikalna veličina se naziva *entropija*, a uveo ju je i nazvao fizičar Rudolf Clausius (1822-1888), koji je zapravo utemeljitelj termodinamike. On je promjenu *entropije* između dva bliska stanja²⁷ sistema definirao tipičnim termodinamičkim parametrima: izmijenjenom toplinom $\Delta Q_{\text{rev}}(1 \rightarrow 2)$ u reverzibilnom procesu, kako smo ga definirali u 2.6.2, između ta dva stanja²⁸ i apsolutnom temperaturom T

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = \frac{\Delta Q_{\text{rev}}(1 \rightarrow 2)}{T} \quad (6.2)$$

Kao što je već napomenuto T je *intenzivna* varijabla koja ne ovisi o veličini sistema u ravnoteži. Podijelimo li sistem na dva dijela oba će imati istu temperaturu kao i cjelina.

²⁷Uvjet *bliska* ovdje znači da apsolutnu temperaturu možemo smatrati konstantnom tijekom procesa izbjegavajući komplikacije koje dolaze od složenosti procesa.

²⁸Proces može biti i zamišljen. Jedino je važno da se odvija reverzibilno između promatranih stanja.

Kako je izmijenjena energija u obliku topline *ekstenzivna* zaključujemo da je takva i *entropija*.

Obzirom da entropija definirana prema Clausiusu (6.2) i termodinamička vjerojatnost kvantitativno odrađuju istu zadaću u opisu makroskopskih sistema između njih definitivno postoji veza. Ingenioznom lucidnošću²⁹ Ludwig Boltzmann (1844-1906) je otkrio da su veličine povezane sljedećom jednostavnom relacijom, definiranoj na isti način kod eksperimenta s novčićima (6.1):

$$S = k_B \ln \Omega$$

gdje je S entropija, Ω termodinamička vjerojatnost, a k_B faktor proporcionalnosti koji se naziva Boltzmannova konstanta³⁰ u čast najzaslužnijem za ovo otkriće. Promjenu entropije između dva stanja sistema kojima poznamo termodinamičku vjerojatnost možemo izravno izračunati

$$\Delta S = k_B \ln \Omega_2 - k_B \ln \Omega_1 = k_B \ln \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \quad (6.3)$$

gdje je s 1 i 2 označeno početno i konačno stanje sistema. Pokazat će se da je uloga *entropije* presudna za razumijevanje termodinamičkih procesa, a njena veza s termodinamičkom vjerojatnošću će omogućiti dubinsko statističko razumijevanje pojma *temperature*.

Jedna od najvažnijih značajki *entropije* je određenost stanjem sistema. Ona ne ovisi o procesu kojim je sistem dospio do njega. Na taj način je slična energiji, a različita je od topline i rada koji ovise o konkretnom procesu. Ovo je sasvim jasno uzimajući u obzir činjenicu da je *termodinamička vjerojatnost* u navedenoj statističkoj definiciji entropije (6.1) broj mikrostanja koje realiziraju promatrano makrostanje. Prema tome svako makrostanje ima točno određenu *termodinamičku vjerojatnost* pa prema tome i vrijednost *entropije*.

Diskusija u prethodnom paragrafu upućuje na zanimljivu analizu veze *entropije* i *termodinamičke vjerojatnosti* koja je tipična za naprednija izlaganja statističke fizike. Kako je razmatranje moguće provesti na tehnički jednostavan način u onom dijelu koji je

²⁹Prisjetimo se da u to vrijeme nije jasno niti postojanje molekula. Većina fizičara u to vrijeme odbija Maxwellov i Boltzmannov koncept mikroskopskih čestica te ih prisiljavaju da o njima pišu kao o matematičkom alatu za računanje bez fizikalne realnosti u strukturi tvari.

³⁰Koju je odredio fizičar Max Planck (1858-1947).

od interesa za nas u ovom odjeljku prikazat ćemo kako sasvim općenite pretpostavke na makrosistem i nešto matematike izravno rezultiraju izrazom (6.1). Jedna od općenitih značajki termodinamičkih sistema je *ekstenzivnost*. To jednostavno znači da su značajke sistema sa dvostruko ili peterostruko većom masom identične sa stanovišta makroskopskog opažaja kao i polazni. Najčešće to znači da trebamo imati dovoljno veliki broj molekula kao u prethodnim vježbama s kovanicama i 2D plinom. Ipak pogrešno bi bilo zaključiti da je to i dovoljan uvjet. Postoje važne iznimke, a njih nalazimo na astronomskim dimenzijama pa tako sunčev sustav nije "velik" u termodinamičkom smislu. To je najčešće posljedica dugodosežnosti dominantnog međudjelovanja. Ako je doseg međudjelovanja isti ili veći od dimenzija sistema onda sistem nema termodinamičku granicu u smislu *ekstenzivnosti*. Sistemi koje proučava metalurgija su redovito *ekstenzivni* tako da mirno možemo prepustiti fizičarima da se "muče" s iznimkama. Pretpostavimo da imamo ekstenzivan sistem u termodinamičkoj granici (to može biti ingot legure). Ako sistem razdijelimo u dva dijela imamo tri *termodinamičke vjerojatnosti*:

cjelina Ω

1. dio $\Omega^{(1)}$

2. dio $\Omega^{(2)}$

To znači da za navedenu podjelu sistema u dva *neovisna* dijela³¹ vrijedi:

$$\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$$

$$E_u = E_u^{(1)} + E_u^{(2)}$$

Prema diskusiji iz prethodnog paragrafa zaključili smo da je entropija funkcija *termodinamičke vjerojatnosti*, koju ćemo označiti s f i da je *ekstenzivna*. Matematički to pišemo:

$$S(\Omega) = f(\Omega) = f(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) = f(\Omega^{(1)}) + f(\Omega^{(2)})$$

Rigorozno se može pokazati da je jedina funkcija f koja odgovara toj relaciji *logaritamska*. Do na konstantu koja zadaje kako mjerimo *entropiju* slobodni smo odabrati prirodni

³¹Preciznije nemeđudjelujuća dijela.

logaritam ln i dobiti Boltzmannov rezultat, čuveni izraz (6.1) i matematički iskazati *ekstenzivnost* istovjetnim izrazom kao i kod energije:

$$S_{\text{tot}} = S^{(1)} + S^{(2)} \quad (6.4)$$

Dodatno smo pokazali da u Clausiusovoj definiciji (6.2) dijeljenje procesne veličine, izmijenjene energije u obliku topline u reverzibilnom procesu, s apsolutnom temperaturom dobivamo varijablu stanja, dakle fizikalnu veličinu koja *ne ovisi* o procesu. Kako je Clausius bez statističke fizike došao do ovog zaključka trebali biste više saznati u tehničkoj termodinamici koja se uglavnom koncentrira na analizu procesa s pomoću idealiziranih toplinskih strojeva³².

2.6.6 Entropija i toplina

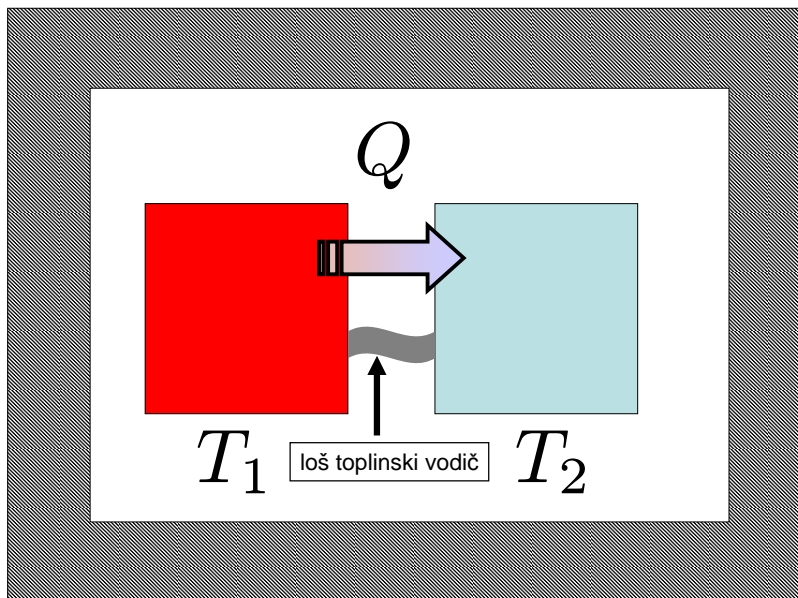
Iako su rad i izmijenjena energija u obliku topline procesne veličine ipak imaju bitno drukčiju poziciju u termodinamici. Rad je uvijek povezan s konkretnom realizacijom sistema (bilo da je riječ o klip u plinu, podizanju utega). Izmijenjena energija u obliku topline u izrazu (5.5) prvog zakona termodinamike ima potpuno općenito značenje i taj udio u zakonu sačuvanja energije se ponaša potpuno neovisno o načinu na koji je nastao. Ako radom promijenimo unutrašnju energiju sistema postoji mogućnost povratka istim putem u početno stanje. Ako podignemo uteg na neku visinu on može obaviti rad i "vratiti uloženo". Ako pak električnom strujom zagrijemo vodič ne možemo nikakvom promjenom makroskopskih uvjeta natjerati sistem da se takva termalna energija ponovno, istim putem, vrati kao organizirano gibanje - električna struja. Ovo smo posebno opisali u odjeljku o *ireverzibilnosti* 2.6.2.

Zamislimo sistem i izotermni proces u kojem primi ili isporuči određenu energiju u obliku topline Q . Prema Clausiusu (6.2) došlo je do promjene entropije

$$\Delta S = S_k - S_p = \frac{Q}{T} \quad (6.5)$$

gdje je

³²To su sistemi koji su u kontaktu s dva spremnika na različitim temperaturama, a karakterizira ih da se u njima odvijaju procesi kojima prolaze nizom stanja duž zatvorenog puta u pV dijagramu i pri tome vrše rad. Napomenimo da su svi strojevi toplinski, ovdje se samo naglašava nužnost postojanja dva vanjska spremnika za kružni proces.



Slika 6.6: Dva izolirana tijela na različitim temperaturama u termalnom kontaktu.

T apsolutna temperatura

Q toplina

S_p entropija početnog stanja

S_k entropija konačnog stanja

Ovisno o tome da li sistem prima toplinu $Q > 0$ ili gubi $Q < 0$ entropija raste ili opada.

Promotrimo sada promjenu entropije u adijabatski izoliranom sistemu u kojem se na početku nalaze dva tijela na različitim temperaturama u termalnom kontaktu ostvarenom lošim toplinskim vodičem³³ prikazan na slici 6.6. Prema izrazu (6.4) ukupna promjena je jednaka sumi promjena entropije pojedinih tijela

$$\Delta S = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)}$$

³³Loše vođenje osigurava da je proces spor i reverzibilan tako da možemo pretpostaviti da tijela prolaze niz ravnotežnih stanja tijekom procesa. U protivnom ne bismo mogli primijeniti izraz za računanje entropije.

i dodatno uzmimo da vrijedi $T_1 > T_2$. Iz iskustva znamo, a ovdje smo to podrobno razmatrali, doći će do *ireverzibilnog* procesa izmjene energije u obliku topline. Kako je kontakt ostvaren s lošim toplinskim vodičem³⁴ koji samo omogućava sporu, reverzibilnu, izmjenu topline. Za malu promjenu u toku procesa možemo uzeti da je $Q^{(1)} = -Q_{\text{rev}}$, a $Q^{(2)} = Q_{\text{rev}}$ jer tijelo 1 gubi, a tijelo 2 prima termalnu energiju. Ovdje smo s Q_{rev} označili *pozitivan* iznos toplinske izmjene. Kao posljedica temperatura se promijeni za mali iznos i to $T_1 \mapsto T_1 - \Delta T_1$, a $T_2 \mapsto T_2 + \Delta T_2$ uz zadržavanje relacije $T_1 - \Delta T_1 > T_2 + \Delta T_2$. Sada možemo korištenjem definicije *entropije* (6.2) odrediti malu promjenu entropije povezanu s ovim procesom:

$$\Delta S = \frac{Q^{(1)}}{T_1 - \frac{1}{2}\Delta T_1} + \frac{Q^{(2)}}{T_2 + \frac{1}{2}\Delta T_2}$$

kako su promjene male možemo uzeti $\Delta T = \Delta T_1 = \Delta T_2$ i dobiti sljedeći izraz

$$\Delta S = -\frac{Q_{\text{rev}}}{T_1 - \frac{1}{2}\Delta T} + \frac{Q_{\text{rev}}}{T_2 + \frac{1}{2}\Delta T} = Q_{\text{rev}} \left(\frac{1}{T_2 + \frac{1}{2}\Delta T} - \frac{1}{T_1 - \frac{1}{2}\Delta T} \right)$$

iz kojeg se jasno vidi da je u ovom slučaju $\Delta S > 0$ jer je $Q_{\text{rev}} > 0$, a apsolutne temperature su uvijek pozitivne, a to nas vodi do općenite formulacije drugog zakona termodinamike koja kaže da u izoliranom sistemu ukupna entropija ne opada i to pišemo

$$\Delta S \geq 0 \quad (6.6)$$

gdje se jednakost odnosi na *reverzibilne* procese. Drugi zakon možemo sada izreći na sljedeći način: *u prirodi ne postoji proces čiji bi ukupni učinak bio smanjenje ukupne entropije*. Za vježbu pokažite na primjeru $T_1 = 373 \text{ K}$ i $T_2 = 273 \text{ K}$ da je nemoguć prijenos i malog iznosa $Q_{\text{rev}} = 8.00 \text{ J}$, a da ne narušimo formulaciju drugog zakona termodinamike (6.6). Konačni zaključak je da smjer i ireverzibilnost realnih termalnih procesa nisu određeni zakonima sačuvanja već posebnim zakonom.

Ovdje se pokazuje prikladno napisati fundamentalnu relaciju termodinamike, a to je prvi zakon termodinamike (5.5) za vrlo malu promjenu unutrašnje energije u reverzibilnom kvazistatičnom procesu s uključenom entropijom (6.6)

$$\delta Q = T\Delta S = \Delta E + \delta W$$

³⁴Za njega ćemo pretpostaviti da mu se stanje ne mijenja osim temperature koja opada od vrijednosti na kojoj se nalazi tijelo 1 do one tijela 2 tijekom procesa.

gdje smo na različite načine označili malu promjenu funkcije stanja Δ i procesa δ . Ako u sistemu imamo rad povezan s promjenom volumena $\delta W = p\Delta V$ gornji izraz možemo pisati kao

$$\Delta S = \frac{1}{T}\Delta E + \frac{p}{T}\Delta V \quad (6.7)$$

Primijetimo sada da su sve veličine u ovom izrazu funkcije stanja i ne ovise o konkretnom procesu. Zaključujemo da *ovaj izraz vrijedi kao jednakost i za ireverzibilne procese* ! Razlog tome je kvantitativno posljedica djelovanja dviju nejednakosti u ovom izrazu u slučaju ireverzibilnog procesa. Prva je povezana s entropijom u ireverzibilnom procesu $\delta Q \leq T\Delta S$, a druga s radom $\delta W \geq -p\Delta V$. Tako za koliko je prva nejednakost veća druga je manja nego u reverzibilnom procesu dajući univerzalnost i veliku važnost ovom rezultatu³⁵. Iz relacije (6.7) možemo dobiti važne izraze koji povezuju promjenu entropije u ovisnosti o energiji uz stalni volumen:

$$\left(\frac{\Delta S}{\Delta E}\right)_V = \frac{1}{T}$$

koja daje pravi termodinamički smisao temperaturi i njenoj izravnoj povezanosti s entropijom odnosno brzinom promjene entropije po energiji. Druga relacija je ovisnost o volumenu uz stalnu unutrašnju energiju

$$\left(\frac{\Delta S}{\Delta V}\right)_E = \frac{p}{T}$$

koje upućuju na vrlo važan pojam u naprednijim razmatranjima termodinamike *termodinamičkim potencijalima* i konjugiranim varijablama obzirom na entropiju: $1/T$ prema E i p/T prema V . Napomenimo da ovi izrazi upućuju da su za entropiju E i V "prirodne" varijable što znači da su izrazi u kojima pratimo baš ove veličine "pogodni" u smislu jednostavnosti i operativnoga računa. Kao primjer termodinamičkih potencijala navedimo i *entalpiju* koja se definira kao

$$H = E + pV$$

koju ćete detaljnije proučavati u posebnim kolegijima, a posebno u kemiji. Spomenimo bez dokazivanja da je to termodinamički potencijal koji uključuje energiju potrebnu da se sistemu "nametne" tlak p . Prirodne varijable za *entalpiju* su entropija S i tlak p .

³⁵Bez obzira na univerzalnu primjenjivost rezultata račune moramo obavljati duž zamišljenih kvazistatičnih putanja koje uključuju niz ravnotežnih stanja koja odgovaraju određenim vrijednostima tlaka, temperature, gustoće i ostalih.

2.7 Simulacije

Ovaj odjeljak sadrži upute za provođenje nekoliko kompjutorskih eksperimenata iz područja termodinamika i molekularno kinetička teorije koji imaju zadaću promijeniti metodologiju učenja odabranih cjelina iz pasivne u aktivnu. Sve simulacije su besplatno dostupne i uspješno su korištene u nizu kolegija. Osnovna motivacija za ovakav pristup je promjena paradigme uloge studenta kao aktivnog istraživača koji može s pomoću kompjutora vizualizirati i provjeravati apstraktne matematičke formulacije problema.

2.7.1 Plinovi

Očekivani ishodi učenja nakon uspješno provedenih aktivnosti na ovoj vježbi su

- objasniti stanja plinova prikazom i ilustracijom ovisnosti o volumenu, temperaturi i tlaku u sistemu
- objasniti plinske zakone (Charlesov, Boyle-Mariotteov)
- kvalitativno analizirati međudjelovanje atoma i prirodu sile koja omogućava stvaranje čvrstog stanja tvari

Jedan od ciljeva vježbe je detaljno se upoznati s jednačom stanja idealnog plina.

Postupak je sljedeći

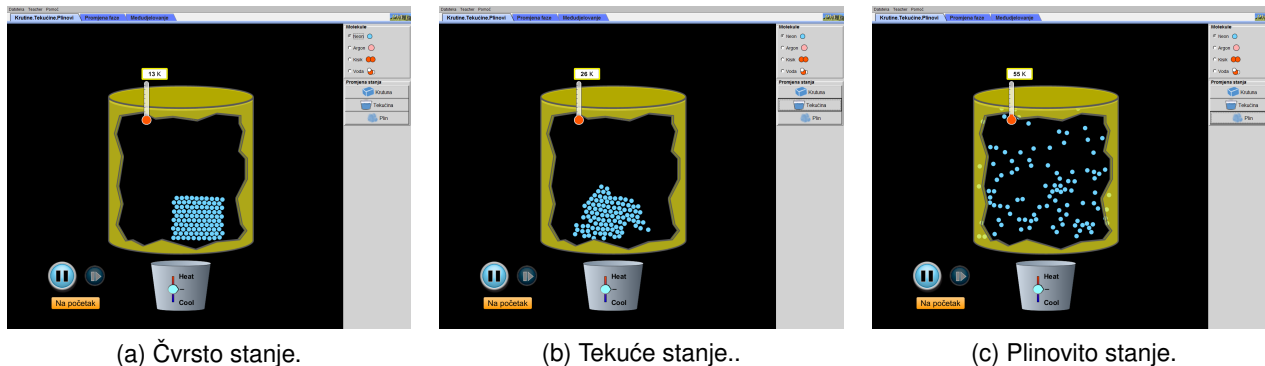
- pokrenite PhET aplikaciju stanja plinova s poveznicom na simulaciju
- Kao prvu aktivnost predlaže se

2.7.2 Stanja tvari simulacija

Očekivani ishodi učenja nakon uspješno provedenih aktivnosti na ovoj vježbi su

- objasniti stanja tvari prikazom i ilustracijom ovisnosti stanja o temperaturi i tlaku u sistemu
- objasniti razliku u značajkama gibanja za različite molekule kemijskih elemenata
- kvalitativno analizirati međudjelovanje atoma i prirodu sile koja omogućava stvaranje čvrstog stanja tvari

Prije ove aktivnosti važno je da su studenti upoznati sa konceptom kinetičke energije, mikroskopskog razumijevanja temperature te osnovnih značajki čvrste, tekuće i plinovite faze.



(a) Čvrsto stanje.

(b) Tekuće stanje..

(c) Plinovito stanje.

Slika 7.1: Agregatna stanja jednostavne tvari (simulacija).

Važno je napomenuti da je prikaz u simulaciji kvalitativan, dvodimenzionalan pa prema tome s nizom kompromisa koji ne odgovaraju realnim tvarima. Napomenimo nekoliko važnih primjedbi:

- Za vodu u čvrstom stanju pojednostavljeni model naglašava činjenicu da unutar kristala postoje šupljine koje simboliziraju anomaliju vode³⁶. Čitatelja može pogledati podroban prikaz na <http://www.lsbu.ac.uk/water/ice1h.html>.
- Iako se simulacija ne može koristiti za kvantitativno proučavanje faznih dijagrama, na desnoj strani je dostupan prikaz dijagrama na kojem je označena točka koja odgovara stanju tvari u simulaciji.

³⁶Gustoća leda je manja od tekuće vode. Bez obzira na jednostavnu molekularnu strukturu voda posjeduje iznimno kompleksan anomalni karakter uzrokovan intra-molekularnim vodikovim vezama. Kao plin ona je među najrjeđim, kao tekućina gušća je od očekivanja, a opet u čvrstom stanju mnogo rjeđa od očekivanja prema tekućoj fazi.

- Treći prozor omogućava simulaciju molekularne dinamike uz prikaz potencijalne energije međudjelovanja atoma s tipičnom ovisnošću koja je na malim udaljenostima snažno odbojna, opada relativno brzo s udaljenošću i ostvaruje minimum potencijalne energije koji omogućava postojanje stabilnog vezanog stanja dva atoma.

Postupak je sljedeći

- pokrenite PhET aplikaciju Agregatna stanja tvari s poveznicom na simulaciju
- Kao prvu aktivnost predlaže se pokušati na osnovu simulacije, koja je dostupna na prvoj stranici aplikacije, odrediti razlike u ponašanju molekula plinova ovisno o agregatnom stanju.
- Kao drugu aktivnost predlaže se razmatranje razlike u ponašanju različitih kemijskih sastava - molekula. Posebno je vrijedno bilježiti odnos temperature, tlaka i ponašanja molekula za pojedine tvari.
- Odredite odnos kinetičke energije u sistemu i temperature. Provjerite koncept statističke interpretacije temperature.
- Skicirajte tlak-temperatura dijagram kisika i vode na osnovu prikaza na desnoj strani prozora "Promjena faze". Naznačite anomaliju vode kao kvalitativnu razliku u faznom dijagramu u odnosu na kisik.

Izlaganje u ovom poglavlju završimo još jednim zanimljivim razmišljanjem o termodinamici koje je A. Einstein (1949) napisao u svojim memoarima:

"A theory is the more impressive the greater the simplicity of its premises, the more varied the kinds of things that it relates and the more extended the area of its applicability. Therefore classical thermodynamics has made a deep impression on me. It is the only physical theory of universal content which I am convinced, within the areas of the applicability of its basic concepts, will never be overthrown."

2.8 Riješeni primjeri

2.8.1 Rad - primjeri

U odjeljku 2.5.4 pokazali smo kako se računa rad na primjeru idealnog plina. Ovdje ćemo pokazati kako se račun obavlja s tvari u tekućem i čvrstom stanju.

Primjer 2.1 (Izotermalna kompresija vode). Izračunajte rad potreban za izotermalnu kompresiju 1 mola vode na 293 K povećanjem tlaka od $p_0 = 1$ [atm] do 2 atm. Neka je gustoća vode $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kgm}^{-3}$. Volumni modul vode je u ovom rasponu tlakova $B = 2 \times 10^9 \text{ [Nm}^{-2}\text{]}$ Volumni modul nam daje odnos promjene tlaka i volumena:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

gdje je V_0 polazni volumen.

Rješenje Prvo moramo uočiti da voda u zadanim uvjetima nije idealni plin pa ne vrijedi (5.12).

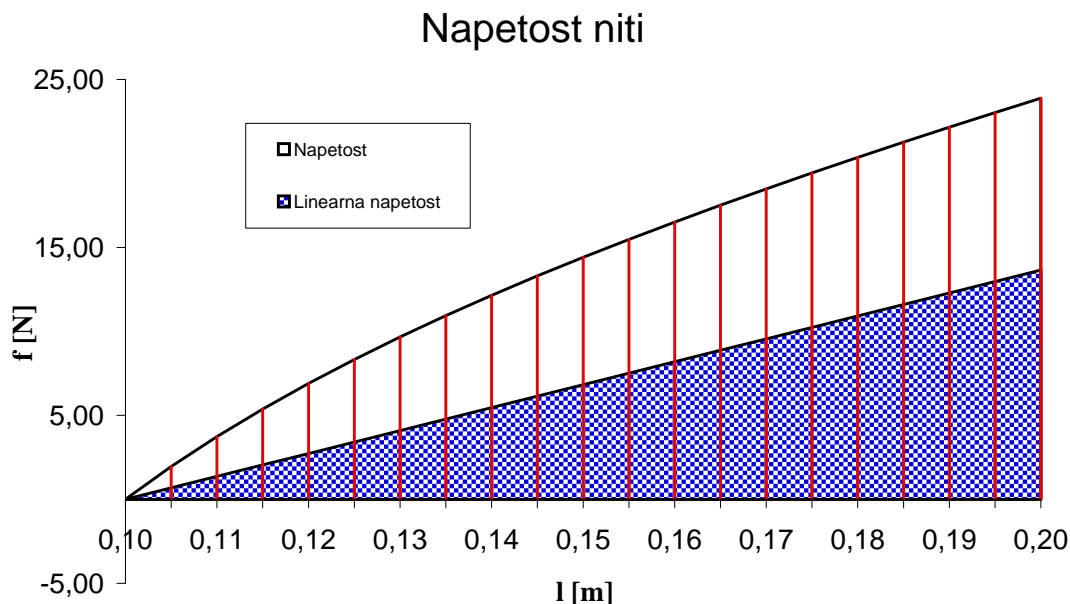
$$\Delta W = -(p - p_0)\Delta V = (p - p_0) \frac{V_0}{B} \Delta p = \frac{m}{B\rho_{\text{H}_2\text{O}}} (p - p_0)\Delta p$$

Dobili smo linearnu ovisnost promjene tlaka i rada, a problem kumulacije preko linearne ovisnosti smo riješili na problemu rada i potencijalne energije elastične opruge. Matematički se problem postepenog povećanja tlaka svodi na računanje površine ispod funkcije rada po jedinici tlaka $\frac{\Delta W}{\Delta p}$, a to je pravokutni trokut. Konačno rješenje problema je:

$$W(p_0 \rightarrow_{T=\text{const}} 2p_0) = \frac{m}{B\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \frac{(2p_0 - p_0)^2}{2} = \frac{M(\text{H}_2\text{O})n(\text{H}_2\text{O})}{B\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \frac{p_0^2}{2}$$

Ovdje smo pretpostavili da se u promatranom rasponu tlakova za danu temperaturu volumni modul i gustoća ne mijenjaju. Obje se pretpostavke mogu opravdati s visokom točnošću ukoliko se pogledaju tipične promjene. Volumni modul se poveća za 5% tek pri tlaku 172 atm pri zadanim uvjetima. Prema tome možemo izračunati

$$W(p_0 \rightarrow_{T=\text{const}} 2p_0) = \frac{18 \times 10^{-3} \text{ [kgmol}^{-1}\text{]} 1 \text{ [mol]} (1.01 \times 10^5 \text{ [Nm}^{-2}\text{]})^2}{2 \times 10^9 \text{ [Nm}^{-2}\text{]} 1000 \text{ [kgm}^{-3}\text{]}} \frac{1}{2} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ [J]}$$



Slika 8.1: Grafički prikaz duljine l i napetosti elastične niti s nelinearnim članom. Rad pri istezanju je površina ispod krivulje koja je označena crvenim linijama.

Primjer 2.2 (Rad pri istezanju elastične niti). Izračunajte rad potreban za izotermalno istezanje elastične niti duljine $l_0 = 1.0$ m u ravnotežnom stanju bez unutrašnje napetosti na dvostruko veću duljinu pri 273 K ako je odnos napetost f , apsolutne temperature T i duljine niti l :

$$f = K_e T \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0^2}{l^2} \right)$$

Neka je $K_e = 0.05 \text{ NK}^{-1}$ za promatrani materijal.

Rješenje Rad pri istezanju koje obavljamo dovoljno lagano da ga možemo smatrati reverzibilnim je dan s dobro poznatim izrazom

$$\Delta W_{\text{rev}}^{\text{exp}} = f \Delta l$$

Uvrstimo li jednadžbu stanja elastične niti dobivamo

$$\Delta W_{\text{rev}}^{\text{exp}} = K_e T \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0^2}{l^2} \right) \Delta l$$

Da bismo odredili rad potrebno je sumirati doprinose pri istezanju za niz malih doprinosa što geometrijski predstavlja površinu ispod krivulje napetosti prikazane na slici 8.1. Matematički to možemo zapisati sljedećim izrazom integralnoga računa

$$W_{\text{rev}}^{\text{exp}}(l_0 \rightarrow 2l_0) = \int_{l_0}^{2l_0} dl K_e T \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0^2}{l^2} \right)$$

Da bismo izračunali rad potrebno je izračunati ovaj određeni integral. Zamislimo za početak da nema nelinearnog člana u izrazu za napetost. U tom slučaju račun se može obaviti elementarnom geometrijom. Izraz za napetost je

$$f = K_e T \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)$$

pa je ovisnost linearna. Iz analize odnosa rada i potencijalne energije elastične opruge znamo odrediti rad istezanja koji u tom slučaju geometrijski predstavlja površinu trokuta

$$W_{\text{rev}}^{\text{exp}}(l_0 \rightarrow_{\text{lin}} 2l_0) = K_e T \left(\frac{(2l_0)^2}{2l_0} - l_0 \right) = K_e T l_0 = 0.05 \text{ [NK}^{-1}] 273 \text{ [K]} 1.0 \text{ [m]}$$

Na slici 8.1 je ovaj rezultat označen plavim horizontalnim crtama i iznosi:

$$W_{\text{rev}}^{\text{exp}}(l_0 \rightarrow_{\text{lin}} 2l_0) = 13.65 \text{ [J]}$$

Ako uključimo i nelinearni član izravnom primjenom Newtonove formule za određeni integral dobivamo:

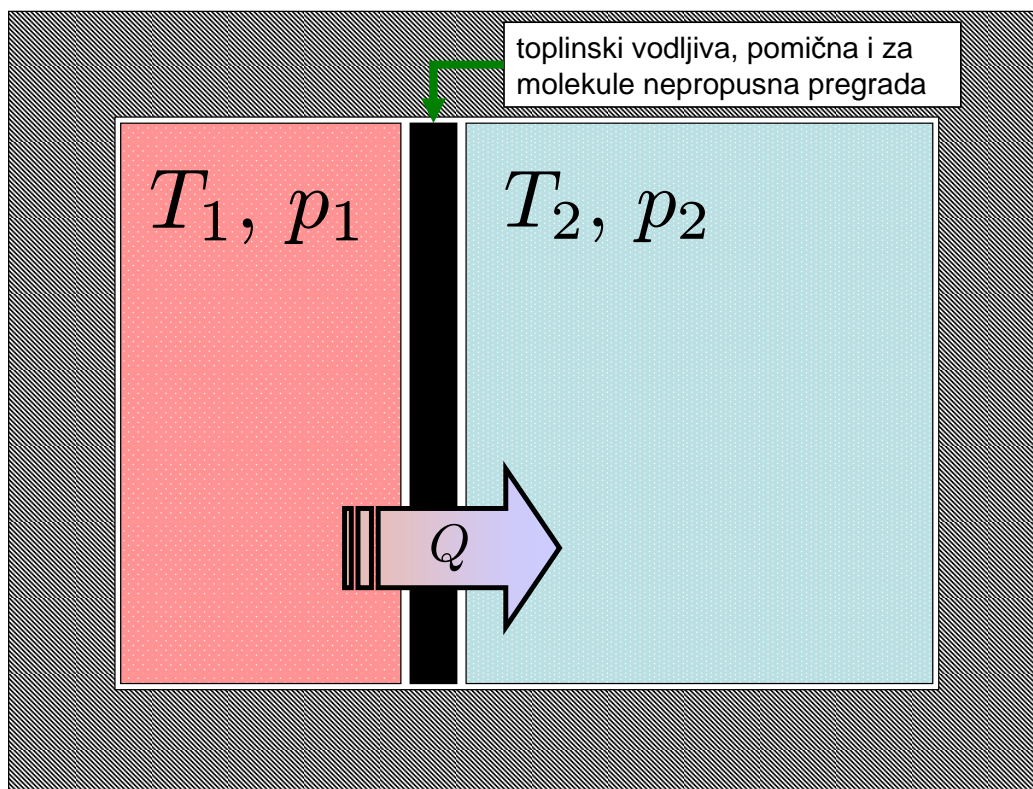
$$\begin{aligned} W_{\text{rev}}^{\text{exp}}(l_0 \rightarrow 2l_0) &= 13.65 \text{ [J]} + \int_{l_0}^{2l_0} dl K_e T \left(1 - \frac{l_0^2}{l^2} \right) = 13.65 \text{ [J]} + K_e T \left(l + \frac{l_0^2}{l} \right) \Big|_{l_0}^{2l_0} = \\ &= 13.65 \text{ [J]} + 13.65 \text{ [N]} \left(2l_0 - l_0 + \frac{l_0^2}{2l_0} - \frac{l_0^2}{l_0} \right) \text{ [m]} = 20.48 \text{ [J]} \end{aligned}$$

Što daje konačni rezultat. ◀

2.8.2 Ravnoteža

Primjer 2.3 (Termalizacija). Promotrimo dva adijabatski izolirana sistema s tlakovima p_1 i p_2 te temperaturama T_1 i T_2 . Dovedemo ih u termalni kontakt na način da se unu-

tražnja energija ΔE i volumen ΔV mogu izmjenjivati između ova dva sistema. Odredite promjenu entropije u procesu *termalizacije* i pokažite da se termička ravnoteža postiže izjednačavanjem tlaka i temperature.



Slika 8.2: Prikaz dva hipotetska sistema 1 i 2 koji mogu izmjenjivati unutrašnju energiju i volumen. Sistemi su odijeljeni idealno nepropusnom, pomičnom i toplinski vodljivom pregradom.

Rješenje Krenimo od osnovnog izraza (6.7) i primijenimo ga na oba sistema:

$$\Delta S_i = \frac{1}{T_i} \Delta E_i + \frac{p_i}{T_i} \Delta V_i \quad i = 1, 2$$

Kako je entropija aditivna veličine vrijedi da je ukupno

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Primijetimo sada da je u adijabatski izoliranom sistemu

$$\Delta E_1 = -\Delta E_2 \equiv \Delta E \quad \Delta V_1 = -\Delta V_2 \equiv \Delta V$$

gdje smo se riješili suvišnih indeksa. Sada nam je promjena ukupne entropije korištenjem gornjih izraza

$$\Delta S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \Delta E + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) \Delta V$$

Drugi zakon termodinamike osigurava da je u procesu promjena entropije uvijek pozitivna. To znači da će entropija rasti do maksimalne vrijednosti u kojoj će nadalje uvijek biti $\Delta S = 0$. U slučaju ova dva sistema to znači da nakon postizanja maksimalne vrijednosti entropije u zajedničkom sistemu entropija više ne može rasti izmjenom unutrašnje energije i izmjenom volumena između sistema 1 i 2. Prema posljednjem izrazu to, $\Delta S = 0$, je moguće samo ako je $T_1 = T_2$ i $p_1 = p_2$. Ovaj rezultat ima zapravo iznimnu općenitost: proces *termalizacije* završava *izjednačavanjem intenzivnih termodinamičkih varijabli*. ◀

Primjer 2.4 (Istezanje elastične niti). U primjeru 2.2 smo se upoznali kako odrediti rad pri istezanju elastične nelinearne niti. Promotrimo sada elastični štap načinjen od metala ili gume duljine L , presjeka A . Kako se mijenja napetost štapa ako se zagrijava pri stalnoj duljini? Neka je izotermni Youngov modul dan izrazom

$$E_T = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{L}{A} \left(\frac{\Delta f}{\Delta L} \right)_T$$

gdje je $\sigma = \Delta f/A$ dano naprezanje, a $\epsilon = \Delta L/L$ deformacija. Linearni koeficijent širenja pri stalnom naprezanju se definira kao

$$\alpha_f = \frac{1}{L} \left(\frac{\Delta L}{\Delta T} \right)_f$$

Odredite i promjenu unutrašnje energije pri izotermalnom istezanju. Iskoristite sljedeći identitet:

$$\left(\frac{\Delta S}{\Delta L} \right)_T = - \left(\frac{\Delta f}{\Delta T} \right)_L \quad (8.1)$$

Rješenje Generiranje naprezanja uslijed toplinskog širenja pri stalnoj duljini možemo odrediti u dva koraka:

1. zagrijemo štap za neki mali iznos ΔT čime se duljina promijeni pri stalnom naprezanju $f = 0$ u

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \Delta T \alpha_f$$

2. sada komprimiramo štap za taj iznos na početnu duljinu L izotermalno

$$\Delta f = A\sigma = AE_T(-\epsilon) = -AE_T\Delta T\alpha_f$$

gdje smo uzeli u obzir promjenu predznaka deformacije. Koristeći (8.1) možemo dobiti sljedeće dvije korisne relacije:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta T}\right)_L = -AE_T\alpha_f \quad (8.2)$$

$$\left(\frac{\Delta S}{\Delta L}\right)_T = AE_T\alpha_f \quad (8.3)$$

gdje se uzima da u procesima možemo zanemariti promjenu A . Vidimo da promjena entropije pri istezanju ili komprimiranju elastičnog štapa ovisi bitno o predznaku α_f . Za metalni štap istezanje uzrokuje povećanje *entropije* i s njom povezanu apsorpciju topline

$$\delta Q = T\Delta S = AE_T\alpha_f T\Delta L$$

Mikroskopski to možemo shvatiti tako da uočimo utjecaj istezanja metalne žice $\alpha_f > 0$ na raspored kristalnih zrna koja su obično bez preferirane dimenzije (nisu npr izdužena) koja su prije istezanja u uređenom stanju. Rezultat istezanja je poremećaj u mikrostrukтури koji raspored zrna prevodi u stanje više termodinamičke vjerojatnosti pa time i povećanja entropije prema fundamentalnom izrazu (6.3).

Za istezanje gumenog štapa učinak je suprotan. Ovdje je $\alpha_f < 0$ tako da se pri izotermnom istezanju toplina oslobađa. Djelovanje sile istezanja u ovom slučaju uređuje raspored vrlo izduženih molekula gume (početno zamršeno raspodijeljenih) na način da ih orijentira uzdužno u smjeru istezanja prevodeći sistem iz stanja više u stanje niže termodinamičke vjerojatnosti.

Može se postaviti pitanje otkuda termodinamika "zna" raspored i oblik zrna u metalnom ili molekula u gumenom štapu. Odgovor je da ne zna. Informaciju je dobila kroz koeficijent linearnog širenja α_f . Njegova vrijednost, uključujući i predznak, u potpunosti je određena mikrostrukturom tvari od koje se sastoji štap.

Prema primjeru 6.7 rad pri istezanju je $\delta W \geq f\Delta L$ ³⁷ gdje jednakost vrijedi za reverzibilni proces, a to nam omogućava da fundamentalnu relaciju (6.7) napišemo u

³⁷Primijetite razliku u predznaku prema radu pri kompresiji/ekspanziji fluida $-p\Delta V$ gdje je $p > 0$, a ΔV je negativan ili

pogodnom obliku:

$$\Delta E = T\Delta S + f\Delta L$$

odakle dobivamo dijeljenjem izraza s ΔL pri stalnoj temperaturi

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta L}\right)_T = T \left(\frac{\Delta S}{\Delta L}\right)_T + f = AE_T\Delta T\alpha_f + f$$

gdje smo iskoristili važnu relaciju (8.1) i rezultat prvog dijela zadatka. Promjena unutrašnje energije je zbroj dva doprinosa:

1. Prvi član opisuje prijenos topline u štap zbog izotermne promjene duljine³⁸.
2. Drugi član je doprinos rada nad štapom promjeni unutrašnje energije.



pozitivan. Razlika dolazi od činjenice da i pri kompresiji i pri istežanju elastičnog štapa *obavljamo rad nad* štapom tako da je rad uvijek pozitivan i povećava unutrašnju energiju, a to se operativno ostvaruje tako da se uzima $f > 0$, $\Delta L > 0$ za istežanje i $f < 0$, $\Delta L < 0$ za kompresiju.

³⁸Za idealni plin vrijedi isti formalizam, ali se u tom slučaju rad koji obavlja plin i toplinski prijenos pokrate tako da je konačni rezultat stalna vrijednost unutrašnje energije.

Poglavlje 3

Osnove dinamike fluida

"At each stage I reach a balance, a conclusion. At the next sitting, if I find that there is a weakness in the whole, I make my way back into the picture by means of the weakness (I re-enter through the breach) and I reconceive the whole. Thus everything becomes fluid again."

- Henri Matisse, Statement to Tériade, quoted by Tériade in "Constance de Fauvisme," Minotaure (1936-10-15), prijevod na engleski Jack Flam u "Matisse on Art" (1995)

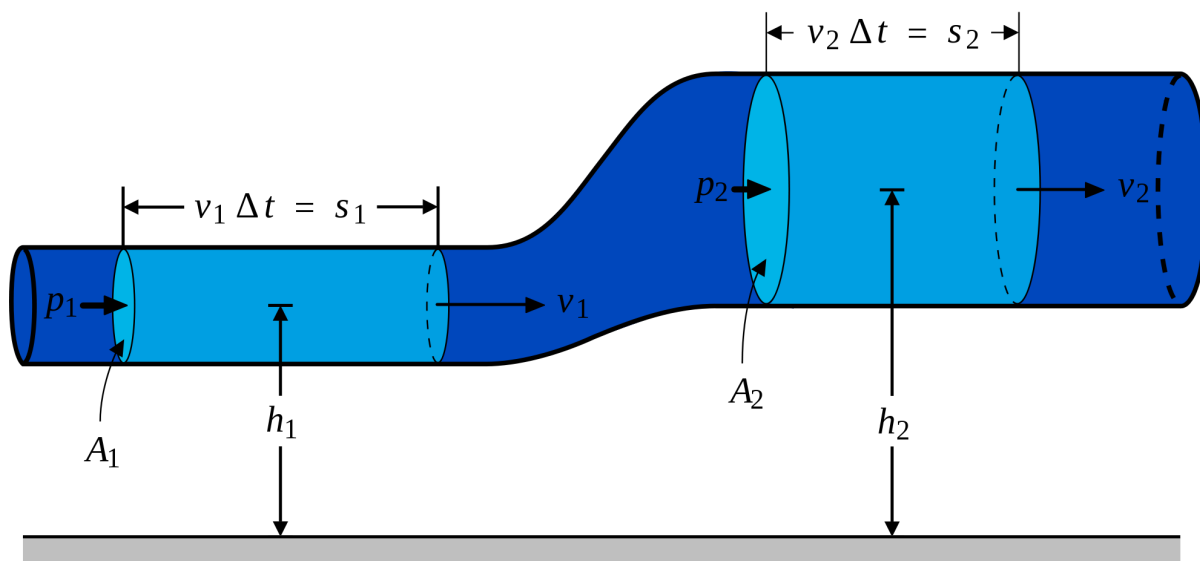
3.1 Termodinamičke veličine pri gibanju fluida

Ovdje ćemo razmatrati osnovne pojave i primjenu zakona termodinamike na fluide¹ u gibanju. Stanje fluida u gibanju nije određeno samo s tlakom p , gustoćom ρ i temperaturom T već i s brzinom \vec{v} kojom se dijelovi gibaju. U ovom razmatranju promatrat ćemo brzinu, tlak, gustoću i temperaturu kao četiri parametra, koji mogu biti prostorno ovisni, čije promjene opisuju procese koji se odvijaju u fluidu. Radi jednostavnosti promatrat ćemo gibanje² fluida kroz cijevi (npr slika 1.1), općenito različitog oblika i promijenjivog presjeka, gdje ćemo razlikovati stacionarno i nestacionarno gibanje. Stacionarno gibanje je ono kod kojeg se četiri spomenuta parametra na određenom mjestu ne mije-

¹plinovi i tekućine

²gdje ćemo uzeti da su brzine mnogo manje od brzine svjetlosti, dakle klasično područje

njaju u vremenu. Sva ostala gibanja su nestacionarna. Razmatranja u ovom poglavlju



Slika 1.1: Prikaz jednostavne cijevi s tipičnim veličinama koje promatramo u ovisnosti o mjestu i vremenu.

započinjemo zanimljivim primjerom statičnoga fluida - zemljine atmosfere.

3.2 Tlak zemljine atmosfere

Uzgon i standardne sisteme koji se obično promatraju u uvodnim izlaganjima iz mehanike fluida ostavljamo prikazu u udžbeniku [Kul95]. Ovdje ćemo osnovna znanja primijeniti na zanimljiviji slučaj koji će uključiti i elemente fizičkog modeliranja.

Vjerojatno vam je poznato da gustoća zraka i tlak opadaju s povećanjem nadmorske visine. To je ujedno razlog zbog kojeg su potrebne posebne mjere opreza kada se uspinjemo na vrlo visoke planine (više od 3000 m nad razinom mora). Zrakoplovi pri letu na velikim visinama moraju posebnim sustavima osigurati normalan tlak zraka putnicima. Kao dramatična posljedica ove pojave je i nekoliko zrakoplovnih nesreća koje su uzrokovane "izbijanjem" loše dizajniranih/izvedenih vrata zbog razlike u tlaku unutar i van zrakoplova (veći tlak je naravno unutar zrakoplova).

Pokazat ćemo kako koristeći se modelom idealnog plina³ i statikom fluida. Pret-

³Dobro približenje za atmosferu, posebno na većim visinama.

postavit ćemo stanje potpuno bez strujanja. Promotrimo zrak unutar zamišljene tanke kutije, površine presjeka A i visine Δh , čije se središte nalazi na visini h iznad razine mora. Volumen zraka je $V = A \Delta h$. U statičkoj ravnoteži ukupna sila na valjak mora biti nula

$$A p\left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) - A p\left(h + \frac{\Delta h}{2}\right) - m(h)g = 0 \quad (2.1)$$

Bočne sile na kutiju ne uzimamo u obzir jer je iz simetrije tijela jasno da je ukupna horizontalna sila nula. S $m(h)$ smo označili masu zraka u kutiji koju možemo izraziti s pomoću gustoće zraka i volumena:

$$m(h) = \rho(h) A \Delta h$$

Osnovnu jednadžbu ravnoteže u sistemu (2.1) sada možemo napisati u pogodnijem obliku:

$$\frac{p\left(h + \frac{\Delta h}{2}\right) - p\left(h - \frac{\Delta h}{2}\right)}{\Delta h} = \frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho(h) g$$

Ovdje smo povezali brzinu promjene tlaka s visinom i gustoću zraka ovisno o h . Ovdje se valja prisjetiti da tlak i gustoća u plinu nisu neovisni već ih povezuje jednadžba stanja plina (4.1) koju ćemo iskoristiti u pogodnom obliku:

$$p(h) = \frac{\rho(h)}{M_{\text{zrak}}} RT(h) \quad (2.2)$$

gdje smo s M_{zrak} označili molarnu masu zraka:

$$M_{\text{zrak}} = 0.78 (28.0 \text{ g mol}^{-1}) + 0.32 (32.0 \text{ g mol}^{-1}) + 0.01 (40.0 \text{ g mol}^{-1}) = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$$

gdje smo ju odredili pretpostavivši sastav zraka N_2 , O_2 , Ar s pripadnim udjelima i molarnim masama.

Konačno imamo sljedeću jednadžbu za atmosferski tlak:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{M_{\text{zrak}} g}{RT(h)} p(h)$$

Ako pretpostavimo kontinuirani medij gornji izraz u granici $\Delta h \rightarrow 0$ postaje diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{M_{\text{zrak}} g}{RT(h)} p(h) \quad (2.3)$$

čije rješenje je funkcija tlaka $p(h)$ koja daje ovisnost o nadmorskoj visini. Da bismo ju mogli riješiti potrebno je opisati ovisnost temperature $T(h)$. U troposferi ($0 \leq h \leq 11$ km) vrijedi jednostavna linearna ovisnost

$$T(h) = T(0) - \alpha h = T(0) \left[1 - \frac{\alpha h}{T(0)} \right]$$

gdje je $\alpha = 6.5$ K/km, a $T(0) = 300$ K. Kako je $\frac{\alpha h}{T(0)} \leq 0.25$ unutar troposfere zanemarit ćemo pad temperature. Kasnije ćemo provjeriti da li je to bilo sasvim opravdano. Rješavanje (2.3) ćemo ostaviti za matematičko razmatranje problema tako da navodimo konačno rješenje:

$$p(h) = p(0) \exp \left[-\frac{M_{\text{zrak}} g}{RT(0)} h \right]$$

gdje možemo ocijeniti da je

$$\frac{Mg}{RT(0)} \simeq \frac{(29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol})(10 \text{ m/s}^2)}{8.3 \text{ J/(mol K)}(300 \text{ K})} = 10^{-4} \text{ m}^{-1} \equiv h_0$$

gdje smo s h_0 označili karakterističnu visinu promjene tlaka⁴. Koristeći jednadžbu stanja (2.2) možemo uz uvedene oznake dobiti gustoću

$$\rho(h) = \frac{M_{\text{zrak}} p(0)}{RT(0)} \exp \left[-\frac{h}{h_0} \right] = \rho(0) \exp \left[-\frac{h}{h_0} \right]$$

Atmosferski tlak u razini površine mora je

$$p(0) = \frac{m_{\text{iznad}} g}{A} = \frac{g}{A} \int_0^{\infty} dh A \rho(h) = g \rho(0) \int_0^{\infty} dh \exp \left(-\frac{h}{h_0} \right) = g \rho(0) h_0 \simeq 10^5 \text{ Pa}$$

gdje vidimo da je rezultat korektan uzimajući u obzir jednostavnost modela s ugrađenim aproksimacijama.

3.3 Jednadžba kontinuiteta

Na najosnovnijoj razini gibanje fluida je opisano s nizom fundamentalnih jednadžbi, matematičkih formulacija odnosa među navedena četiri termodinamička parametra, među

⁴Visina na kojoj tlak padne na otprilike 37% početne vrijednosti.

kojima je prva *jednadžba kontinuiteta* koja izražava očuvanost mase u transportnim pojavama. Za početak ćemo definirati tok mase kroz presjek cijevi

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Neka je vektor brzine \vec{v} okomit na promatrani presjek cijevi (često u primjeni) tada za vrijeme Δt volumen fluida koji je prošao preko presjeka A iznosi $A v \Delta t$. Odgovarajuća masa fluida je dana preko parametara koje koristimo u računu je

$$q_m = \rho A v.$$

Kako je masa sačuvana veličina⁵ zaključujemo da za bilo koja dva odabrana presjeka duž cijevi kojom se *stacionarno* giba fluid vrijedi relacija

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (3.2)$$

koja predstavlja matematički izraz zakona sačuvanja mase, a nazivamo ju *jednadžba kontinuiteta*. Kada bi ova relacija bila narušena to bi značilo da je kroz presjek A_1 prošla veća količina fluida nego kroz A_2 , a to bi dovelo do povećanja gustoće i tlaka u volumenu između promatranih ploha te bi se morala naposljetku promijeniti brzina gibanja. Tako je pokazano da to gibanje više ne može biti stacionarno ukoliko ne vrijedi jednadžba (3.2).

Postoje važna granica pri gibanju fluida, a to je *nestlačivi* fluid $\rho_1 = \rho_2$ za koji jednadžba kontinuiteta poprima još jednostavniji oblik

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (3.3)$$

3.4 Impulsna jednadžba

U stacionarnom gibanju impuls određene količine fluida ima stalnu vrijednost za zadani presjek. Tijekom strujanja do drugog presjeka impuls se mijenja prema 2. Newtonovom zakonu zbog djelovanja sila uzrokovanih tlakom i unutarnjim trenjem (viskoznošću).

⁵promatramo sisteme kod kojih nema transformacije mase u energiju i obratno

Pokazuje se da je iznimno složeno ispravno uključiti sile uzrokovane unutarnjim trenjem tijekom gibanja fluida. Radi jednostavnosti u daljnjem izlaganju ćemo zanemariti utjecaj viskoznosti⁶ i takav fluid ćemo zvati *idealnim* ili *neviskoznim*.

2. Newtonov zakon za fluid koji se giba između dva presjeka glasi

$$F_1 - F_2 = \frac{\Delta m v_2 - \Delta m v_1}{\Delta t}$$

gdje je $F_i = p_i A_i$ a $i = 1, 2$. Kako vrijedi

$$\rho A v = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

možemo uvrštavanjem u gornji izraz dobiti

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho_2 A_2 v_2^2 - \rho_1 A_1 v_1^2$$

koji nakon algebarskog preuređenja postaje jednačba impulsa za idealni stlačivi fluid.

$$A_1(p_1 + \rho_1 v_1^2) = A_2(p_2 + \rho_2 v_2^2) \quad (4.1)$$

3.5 Bernoullijeva jednačba

Primijenimo sada prvi zakon termodinamike, zakon sačuvanja energije, na gibanje stlačivog fluida. Razmatranja ćemo ponovno ograničiti na gibanje idealnog, dakle neviskoznog, stlačivog fluida, a procese koji se odvijaju ćemo smatrati adijabatskim⁷.

Na presjeku A_1 (vidi sliku 1.1) dio plina mase Δm ima kinetičku energiju $\Delta m v_1^2/2$ i unutarnju energiju $U_1 = \Delta m c_V T_1 + \Delta m g h_1$ tako da je promjena ukupne energije plina pri toku od A_1 do A_2 dana s

$$\Delta E = \Delta m v_2^2/2 + \Delta m c_V T_2 + \Delta m g h_2 - \Delta m v_1^2/2 - \Delta m c_V T_1 - \Delta m g h_1$$

dok je rad plina

$$W = p_2 \Delta V_2 - p_1 \Delta V_1$$

⁶To će, naravno, ograničiti područje primjene dobivenoga fizikalnog modela.

⁷Ova pretpostavka sužava primjenu na one procese koji se odvijaju dovoljno brzo prema toplinskom transportu, a oni čine veliki broj važnih pojava.

gdje su s $\Delta V_{1,2}$ označeni pripadni volumeni promatrane mase fluida na presjecima A_1 i A_2 . Uključivanjem adijabatske pretpostavke ($Q = 0$) za procese dobivamo uvrštenjem u prvi zakon termodinamike (5.5) ukupnu energetska bilancu toka

$$0 = \Delta m v_2^2/2 + \Delta m c_V T_2 + \Delta m g h_2 - \Delta m v_1^2/2 - \Delta m c_V T_1 - \Delta m g h_1 + p_2 \Delta V_2 - p_1 \Delta V_1$$

Podijelimo li ovaj izraz s Δm uz uvažavanje da je $\rho_{1,2} = \Delta m / \Delta V_{1,2}$ dobivamo konačno izraz:

$$v_1^2/2 + c_V T_1 + g h_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = v_2^2/2 + c_V T_2 + g h_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (5.1)$$

koji predstavlja jednadžbu energije ili *Bernoullijevu jednadžbu*⁸.

Primjena Bernoullijeve jednadžbe na razrijeđeni plin omogućava uključenje i jednadžbe stanja idealnog plina

$$p = \frac{\rho R T}{M}$$

gdje je M molarna masa, a ρ gustoća. Uz poznatu relaciju za specifične toplinske kapacitete $c_P = c_V + R/M$ konačno možemo za razrijeđeni plin, ako vrijedi $h_1 = h_2$ koristiti

$$v_1^2/2 + c_P T_1 = v_2^2/2 + c_P T_2 \quad (5.2)$$

ili, ako iskoristimo jednadžbu stanja,

$$v_1^2/2 + \frac{M c_P p_1}{R \rho_1} = v_2^2/2 + \frac{M c_P p_2}{R \rho_2}$$

No kako vrijedi

$$\frac{M c_P}{R} = \frac{c_P}{c_P - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad \frac{c_P}{c_V} = \gamma$$

konačno dobivamo vrlo praktičnu verziju Bernoullijeve jednadžbe za razrijeđene plinove:

$$v_1^2/2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = v_2^2/2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (5.3)$$

Gustoća i temperatura idealnog (neviskoznog) i nekompresibilnog fluida se ne mijenjaju tako da u tom slučaju izraz (5.1) postaje

$$\rho v_1^2/2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2/2 + \rho g h_2 + p_2 \quad (5.4)$$

što je dobro poznati izraz iz udžbenika koji se često koristi kao osnovni izraz za proučavanje dinamike fluida na uvodnim kolegijima fizike.

⁸D. Bernoulli je predložio ovu jednadžbu oko 1738.god.

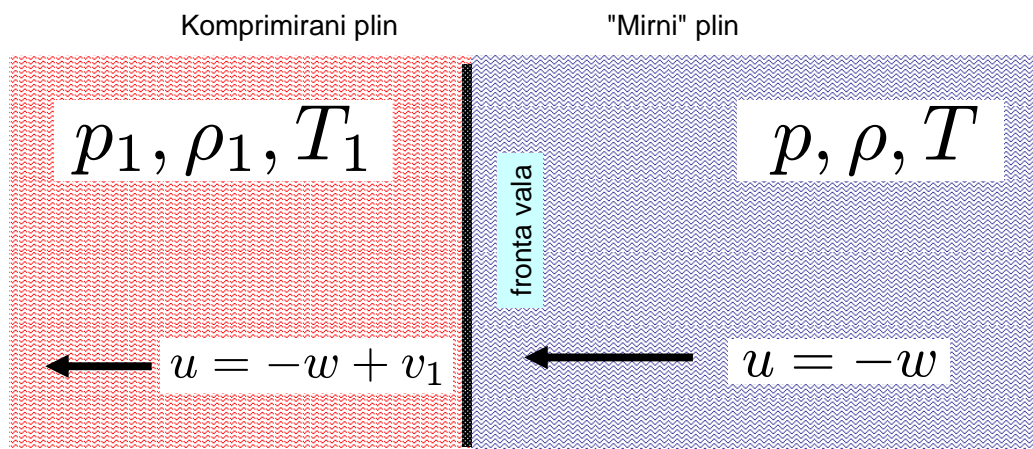
3.6 Gibanje u elastičnom mediju

Primijenimo prethodna razmatranja na analizu sljedećeg problema: zamislimo da se u jednom sloju, inače stacionarnog plina, vrijednost tlaka naglo poveća brzim stlačenjem ili zagrijavanjem. Nastaje neravnotežno stanje jer se sloj pod visokim tlakom počinje širiti i tako prenositi tlačni puls na susjedne slojeve. Budućnost je takva da se kompresija slojeva širi sve dalje i dalje prenoseći energiju iz sloja u sloj. Ovu pojavu nazivamo valom elastične pobude u plinu. Slična pojava nastaje kada bacimo kamen u jezero s mirnom površinom. Početna pobuda na mjestu gdje je kamen upao u jezero se širi u koncentričnim krugovima sa sloja na sloj vode i prikazuje se kao uznemirenje površine. Ovdje napominjemo da geometrijska jednostavnost fenomena ne ovisi o obliku kamena, visini s koje je pao u vodu. Molekule vode jednostavno se samoorganiziraju u dobro poznati oblik koncentričnih krugova koji se pravilno šire.

Valna fronta je ploha u prostoru na kojoj su vrijednosti termodinamičkih veličina (brzine toka fluida, tlaka, gustoće) iste. Brzina gibanja *valne fronte* w je mjera širenja poremećaja od sloja do sloja.

Vratimo se polaznom problemu s plinom koji je u jednom sloju naglo stlačen i pokušajmo odrediti brzinu gibanja poremećaja gustoće i tlaka. Kao i uvijek prvo je potrebno odabrati referentni sustav iz kojeg ćemo promatrati gibanje. U ovom slučaju sustav u kojem opažatelj miruje prema stacionarnom plinu nije dobar izbor jer se u njemu očito ne odvija stacionarno gibanje fluida (tlak i gustoća plina u promatranoj točki ovise o vremenu). Usprkos tome u sustavu u kojem poremećaj miruje imamo savršeno stacionarno gibanje u kojem "mirni" plin struji prema plohi poremećaja - nagle promjene parametara plina. Gledano iz tog sustava imamo stalnu vrijednost tlaka koja se naglo poveća na mjestu fronte i zatim se vrati na ravnotežnu vrijednost. To znači da u tom sustavu možemo upotrijebiti prethodno izvedene jednadžbe kontinuiteta, impulsa i energije (3.2), (4.1) i (5.1).

U odabranom sustavu mirni plin jednoliko struji prema fronti brzinom $u = -w$, komprimirani plin iza fronte kasni za frontom. Njegovu brzinu ćemo označiti s v_1 u sustavu gdje se fronta giba ili $u_1 = v_1 - w$ u sustavu u kojem fronta miruje. Situacija je prikazana na slici 6.1. Izravna primjena jednadžbe kontinuiteta (3.2) i impulsa (4.1) daje



Slika 6.1: Prikaz 1D prijenosa elastičnog poremećaja gustoće u plinu iz sustava u kojem valna fronta miruje.

sljedeće izraze

$$\rho u = \rho_1 u_1 \quad (6.1)$$

$$p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (6.2)$$

eliminiramo li u_1 korištenjem prve jednadžbe dobivamo nakon jednostavnog preuređenja izraz

$$w = |u| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} \frac{p_1 - p}{\rho_1 - \rho}} \quad (6.3)$$

koji predstavlja brzinu širenja fronte u opisanom slučaju.

U plinovima se javljaju dva tipa valnog gibanja: šok i zvučni valovi. Tipična značajka u slučaju šok valova je nagla promjena vrijednosti termodinamičkih parametara (tlak, gustoća) na fronti putujućeg poremećaja. Zbog toga se šok val naziva i tlačni šok.

Zvučni val u plinu je granica male longitudinalne pobude što matematički iskazujemo sljedećim izrazom

$$\frac{p_1 - p}{p} = \frac{\Delta p}{p} \ll 1$$

U tom slučaju vrijedi također $\rho_1 = \rho + \Delta\rho \simeq \rho$ tako da (6.3) možemo zapisati u pojednostavljenom obliku

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \quad (6.4)$$

Brzina gibanja valova zvuka u plinu je velika tako da se uz visok stupanj točnosti može pretpostaviti da je proces stlačivanja tijekom gibanja vala *adijabatska kompresija*, proces opisan u odjeljku 2.5.4 na strani 44.

Ovdje ćemo koristiti izraz (5.20) za rad u kvazistatičnom adijabatskom procesu opisan na strani 45. Dodatno ćemo za promatranje zvuka uvesti pogodne oznake za korištenje izvedenih izraza. Stavljamo $p_1 = p - \Delta p$ i $V_1 = V - \Delta V$ te isto tako $p_2 = p + \Delta p$ i $V_2 = V + \Delta V$ gdje su s 1 i 2 označena krajnja kompresijska stanja. Uz ove oznake izraz (5.20) je oblika

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{(p - \Delta p)(V - \Delta V) - (p + \Delta p)(V + \Delta V)}{\gamma - 1} = -2 \frac{V \Delta p + p \Delta V}{\gamma - 1}$$

Kako je $\Delta p/p \ll 1$ možemo rad ocijeniti i prema srednjoj vrijednosti tlaka u procesu $p_{sv} = p$:

$$W_{sv} = p_{sv}(V_2 - V_1) = 2p\Delta V \simeq W = -2 \frac{V \Delta p + p \Delta V}{\gamma - 1}$$

odakle sređivanjem dobivamo

$$\gamma \frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{p} \quad (6.5)$$

Tijekom širenja zvuka mijenja se gustoća zraka, ali nema promjene mase tako da možemo matematički zapisati sačuvanje mase u procesu:

$$(\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V) = (\rho - \Delta \rho)(V - \Delta V)$$

Nakon sređivanja ovaj izraz postaje

$$2\Delta \rho V = -2\rho \Delta V$$

odakle nakon algebarskog preuređenja sačuvanje mase izražavamo kao sljedeći odnos promjena volumena i gustoće:

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (6.6)$$

Sada se u izrazu (6.5) možemo riješiti ekstenzivnog volumena i prijeći na samo intenzivne termodinamičke varijable

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{p} \quad (6.7)$$

Uvrštavajući ovaj izraz u jednadžbu za brzinu zvuka (6.4) dobivamo

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{\text{plin}}}} \quad (6.8)$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili intenzivnu varijantu jednadžbe stanja idealnog plina (2.2) $p = \rho RT/M_{\text{plin}}$. Uz pretpostavku da zrak možemo smatrati dvoatomnim idealnim plinom $\gamma = 7/5$ molarne mase $M_{\text{zrak}} = 29 \text{ g mol}^{-1}$ vidimo da brzina zvuka ovisi samo o apsolutnoj temperaturi.

$$c = 20\sqrt{T} \text{ [m/s]}$$

gdje T uvrštavamo u Kelvinima.

Izraz (6.8) možemo uvrstiti u varijantu Bernoullijeve jednadžbe (5.3) za gibanje fluida izražene preko brzine zvuka

$$v_1^2/2 + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = v_2^2/2 + \frac{c_2^2}{\gamma - 1}$$

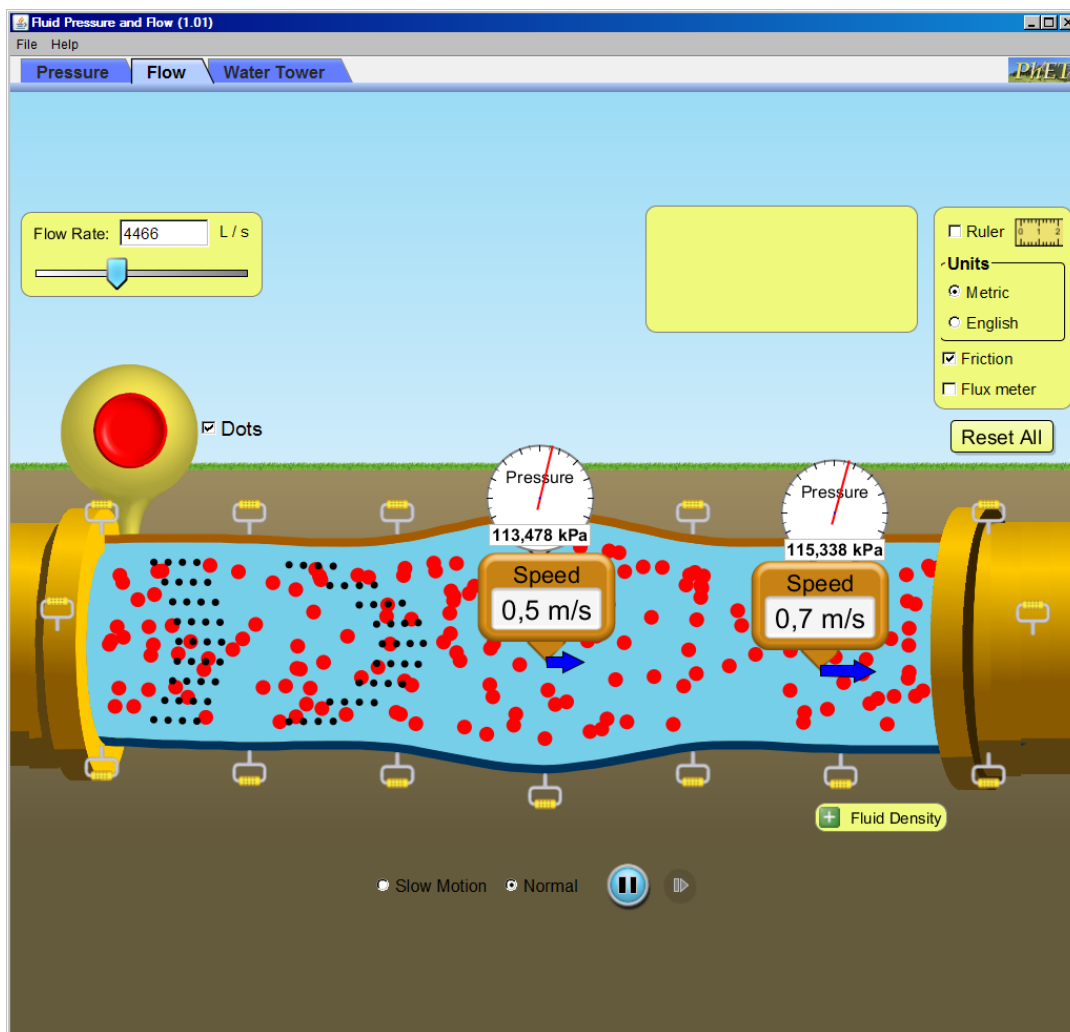
gdje su s $c_{1,2}$ označene brzine zvuka u fluidu na različitim mjestima (ali na istoj visini).

3.7 Tlak i gibanje fluida

U ovom kompjutorskom eksperimentu, dostupnom u najnovijoj inačici preko <http://phet.colorado.edu/en/simulation/fluid-pressure-and-flow>, promatramo statiku i dinamiku fluida. Očekivani ishodi učenja nakon uspješno provedenih aktivnosti na ovoj vježbi su

- analizirati stanje statičnoga fluida u posudama različitog oblika obzirom na odnos tlaka i zakona spojenih posuda
- objasniti stanja fluida u mirovanju i gibanju prikazom i ilustracijom ovisnosti o položaju brzine, temperature i tlaka u sistemu
- objasniti utjecaj površine presjeka cijevi na tok fluida

- analizirati prostorno utjecaj viskoznosti na tok fluida
- Obavljati zamišljena mjerenja brzine toka čestica u fluidu

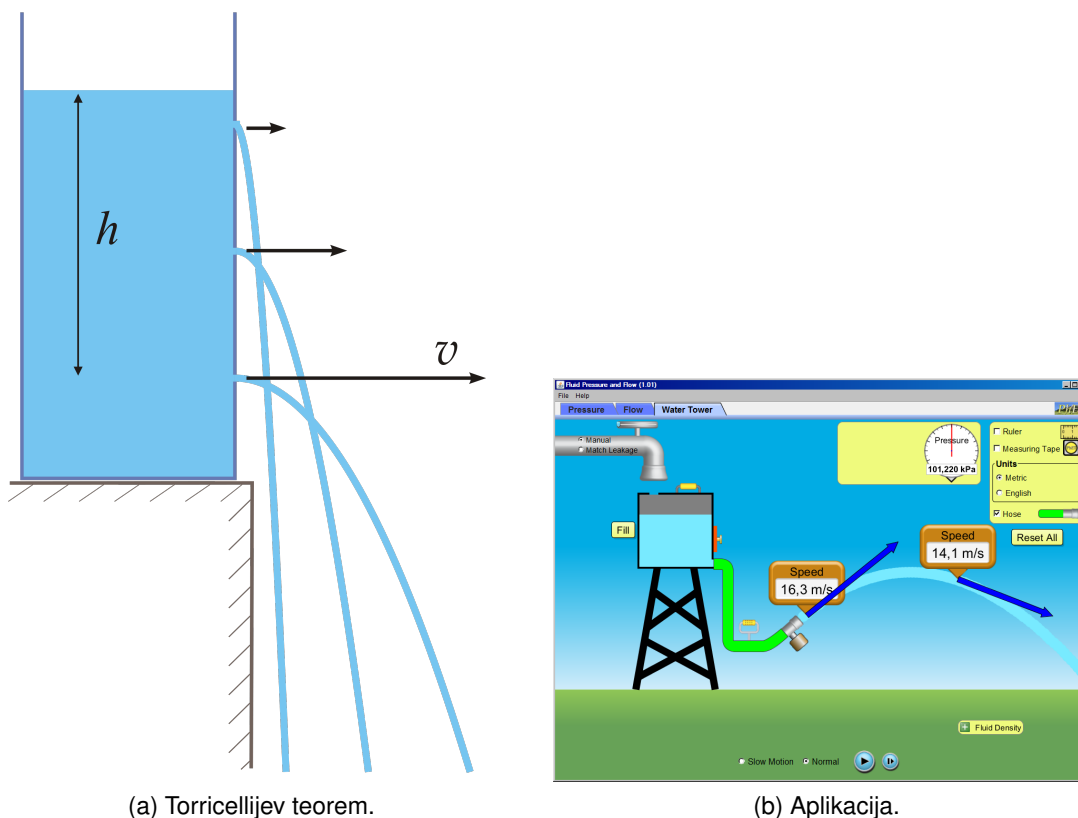


Slika 7.1: Prikaz toka fluida kroz cijev promijenjivog presjeka s uključenom viskoznošću. Učinak viskoznosti je prikazan s redovima crnih krugova postavljenih duž linije toka preko kojih se možemo uvjeriti kakav je učinak trenja između slojeva i mirovanja (stagnacijski sloj) neposredno uz stjenku. Duž linije toka profil brzina gibanja fluida se izobličuje u paraboličan oblik.

Jedan od ciljeva vježbe je detaljno se upoznati s jednadžbama koje smo izveli u prethodnim odjeljcima: (3.2), (4.1) i (5.1).

Postupak je sljedeći

- pokrenite PhET aplikaciju proučavanje fluida s poveznicom na simulaciju



(a) Torricelijev teorem.

(b) Aplikacija.

Slika 7.2: (a) Prikaz Torricelijeva teorema istjecanja. (b) Aplikacija za proučavanje istjecanja gdje se može dodati crijevo s podesivim nagibom kuta i mjeraci brzine toka.

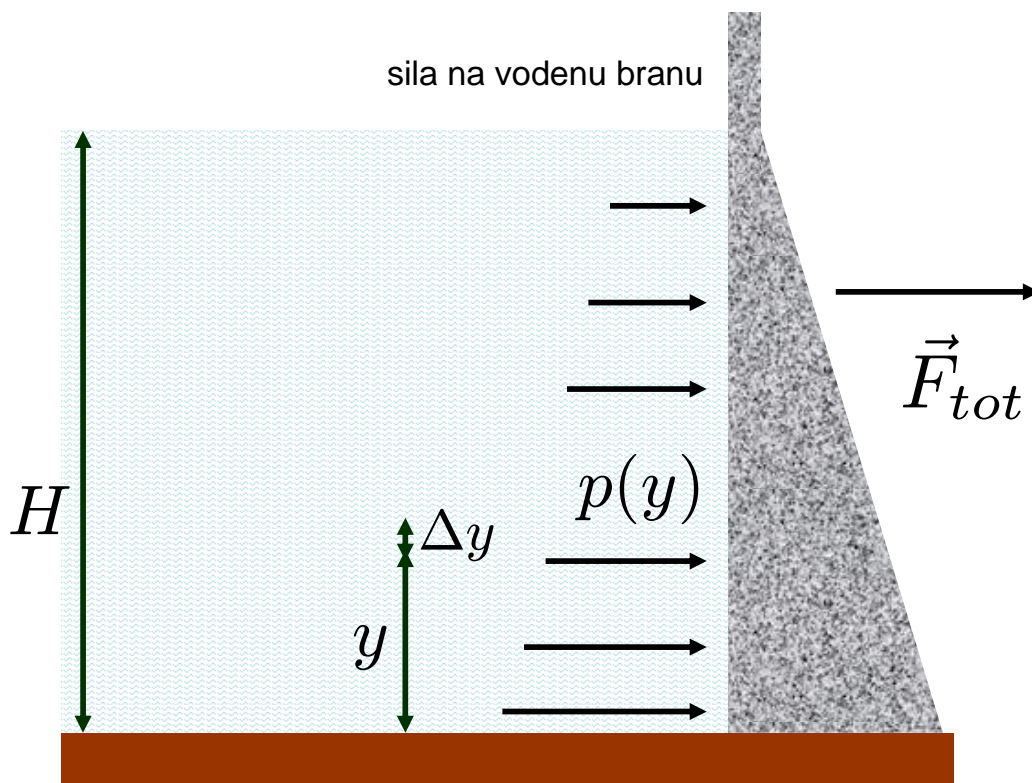
- Kao prvu aktivnost predlaže se analiza prve stranice aplikacije u kojoj se promatra fluid u mirovanju. Ponuđene su vam tri različite konfiguracije posuda.
 1. Na prvoj stranici odaberite tlakomjer i postavite ga u posudu.
 2. Dopunite posudu i promatrajte očitavanje na tlakomjeru.
 3. Pomičite tlakomjer u prostoru posude. Promijenite gustoću i/ili gravitacijsku silu pomoću odgovarajućih klizača (prvo ih morate "otvoriti" pritiskom na "+" znak).
 4. Ponovite postupak na ostalim konfiguracijama, a na trećoj možete eksperimentirati dodavanjem utega na površinu tekućine te promatrati uvjete uspostavljanja ravnoteže kada je jedan otvor opterećen tlakom većim od atmosferskog.
- Druga aktivnost je proučavanje gibanja fluida kroz cijev, a nalazi se na drugoj

stranici aplikacije.

- Treća aktivnost je proučavanje Toricelijeva zakona istjecanja tekućine kroz mali otvor na spremniku.

3.8 Riješeni primjeri

Primjer 3.1 (Sila na branu). Odredite ukupnu silu na branu širine w prema slici 8.1 pri visini vode H .



Slika 8.1: Prikaz tipične brane. Pretpostavlja se da je frontalni oblik pravokutnik.

Rješenje Branu ćemo podijeliti u horizontalne vrpce visine Δy . Znamo da tlak raste s dubinom (na slici označeno sve duljim strelicama koje predstavljaju silu od tlaka na

nekoj dubini y). Tlak u ovisnosti o položaju y je dan s

$$p(y) = \rho g(H - y)$$

Sila na vrpcu širine Δy :

$$\Delta F(y) = p(y)\Delta A = p(y)w\Delta y = \rho g(H - y)w\Delta y$$

Ukupnu silu dobivamo tako da zbrojimo doprinose svih horizontalnih vrpca od $y = 0$ do $y = H$. Ako definiramo funkciju $f(y) = \rho gw(H - y)$ lako se uvjeriti da graf predstavlja pravac, problem zbrajanja doprinosa odgovara površini pravokutnog trokuta:

$$F_{\text{tot}} = \sum_i \Delta F(y_i) = \frac{1}{2}\rho gwH^2$$

Možete se uvjeriti da se ovaj rezultat može dobiti i ako jednostavno iskoristimo srednji tlak na branu:

$$F_{\text{tot}} = p_{\text{av}}A = \frac{p(0) + p(H)}{2}wH = \frac{1}{2}\rho gwH^2$$



Primjer 3.2 (Toriccelijeva zakona istjecanja). Odredite brzinu istjecanja tekućine iz spremnika prema prikazu na slici 7.2. Možete zanemariti brzinu gibanja fluida unutar spremnika.

Rješenje Bernoullijeva jednadžba (5.1) u ovom slučaju poprima oblik:

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

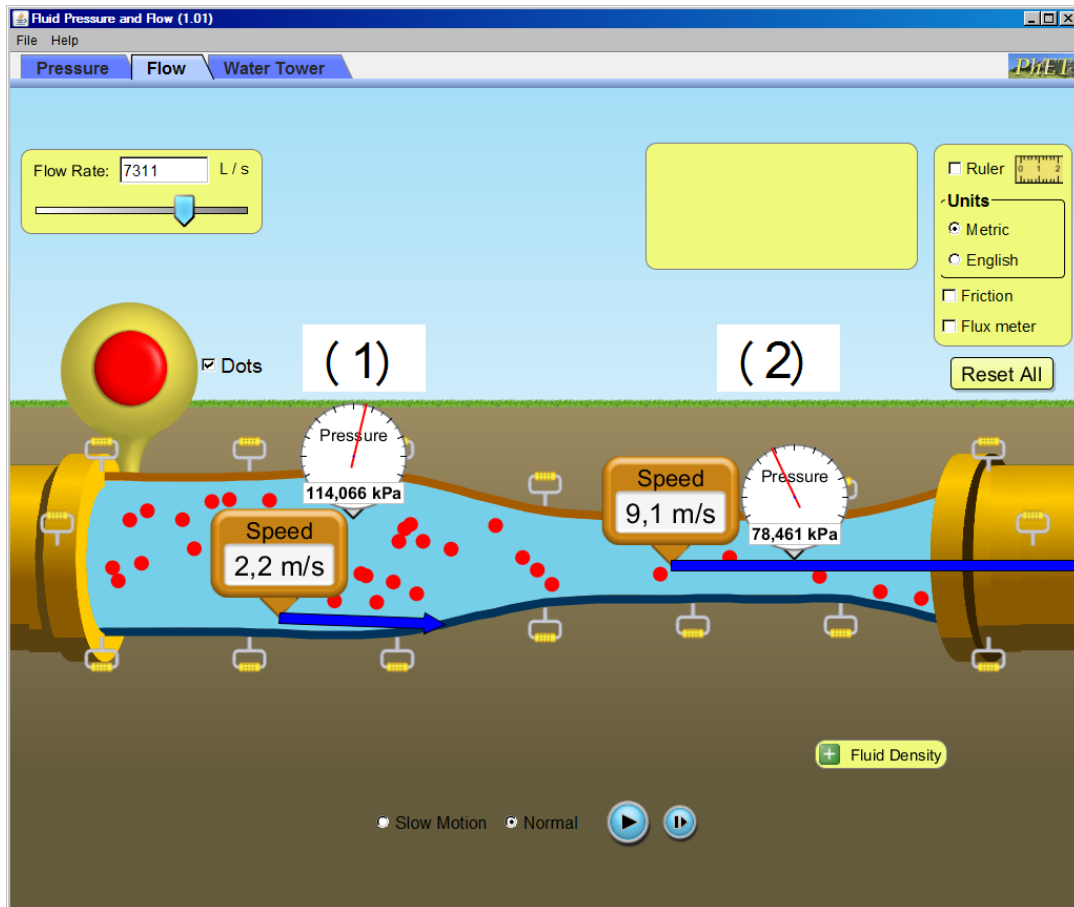
Točka 1 promatranja neka je tik ispod površine u spremniku, a 2 odmah ispred otvora. Otvor je zanemarivih dimenzija, a prema zadatku brzinu gibanja unutar spremnika možemo zanemariti. Možemo staviti:

$$gh + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Primijetite da je visina h ovisna o vremenu tijekom istjecanja, a precizniji račun bismo dobili uzimajući u obzir gibanje fluida u spremniku i viskoznost realne tekućine koja otvor za istjecanje efektivno smanjuje.



Primjer 3.3 (Venturijeva cijev). U vježbi 3.7 i pripadnoj kompjutorskoj simulaciji smo ustanovili da se tlak u fluidu koji teče kroz cijev mijenja ovisno o brzini toka kako se vidi na slici 8.2 za nestlačivi fluid bez trenja. Ovaj učinak možemo iskoristiti za mjerenje brzine gibanja fluida mjerenjem tlaka. Odredite ovisnost brzine o mjerenom tlaku kao na slici 7.1 za nestlačivi fluid.



Slika 8.2: Prikaz tipične Venturijeve cijevi.

Rješenje Bernoullijeva jednadžba (5.1) u ovom slučaju poprima oblik:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

Neka se točka 1 nalazi u užem dijelu cijevi, a 2 iza nje u širem na mjestu tlakomjera. Možemo staviti:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (8.1)$$

Kako je fluid nestlačiv jednačba kontinuiteta (3.2) ima oblik:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Uvrštavanje u Bernoullijevu jednačbu (8.1) dobivamo

$$\frac{v_2^2}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

iz koje jednostavno izrazimo traženu brzinu v_2 :

$$v_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

odakle konačno dobivamo

$$v_2 = A_1 \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Zajedno s (8.1) ovaj izraz pokazuje da je u ovom slučaju $p_1 > p_2$ čime potvrđujemo opažanje iz vježbe da je tlak smanjen u suženom dijelu cijevi s čim se slažu očitavanja na tlakomjerima prikazanim na slici 8.2. ◀

Poglavlje 4

Elektricitet i magnetizam

4.1 Osnovni pojmovi

Znanstvenici su u 18. stoljeću nakon dugog napora razvili koncept em električnog naboja kako bi opisali zapažanja u velikom broju do tada obavljenih eksperimenata s električnim pojavama. Postoje dvije vrste naboja: *pozitivan*, i *negativna*. Istovrsni naboji odbijaju jedni druge, dok se suprotni privlače. Kada se dva tijela dodiruju naboj može biti prijeći od jednog na drugi, ali je pri tome ukupna količina naboja konstantna. Dakle, kada se jantar trlja s krznom ostvaruje se prijenos negativnog naboja na jantar, a krzno ostaje pozitivno za isti iznosu. Isto tako, kada se isti postupak primjeni na staklo i svilu na staklu se nakuplja pozitivan naboj, a na svili jednak iznos negativnog naboja. Fundamentalna ideja fizike da je električni naboj očuvan pripisuje se američkom znanstveniku Benjamin Franklin (koji je također kriv za nesretne znak konvenciji u struju). Em zakon naboja očuvanje može pisati:

U svakom zatvorenom sustavu ukupna količina električnog naboja ostaje stalna.

Naravno, kada se naboji zbrajaju pozitivne predstavljamo kao pozitivne brojeve, a negativne kao negativne brojeve.

U 20. stoljeću znanstvenici su otkrili da se atomi od kojih je sastavljena materija sastoje od dvije komponente: relativno masivne pozitivno nabijene jezgre okružene

oblakom relativno lakih negativno nabijenih čestica koje nazivamo *elektroni*. Elektroni i atomske jezgre nose fiksne količine električnih naboja. U normalnim okolnostima, samo su elektroni mobilni (ako se ne odvijaju nuklearni procesi). Dakle, kada se jantar trlja s krznom elektroni se prenose od krzna na jantar dajući jantaru višak elektrona, a krzno ostaje za isti iznos u manjku elektrona i prema tome pozitivno nabijeno. Tvari normalno ne sadrže ni višak ni manjak elektrona te su električki neutralne.

U SI jedinicama naboj se mjeri u *coulombima* (C). Naboj elektrona i protona je -1.602×10^{-19} C.

4.2 Vodiči i izolatori

Pretpostavimo da smo električno nabili dvije izolirane metalne sfere: jedna s viškom pozitivnog naboja, a druga s jednakim viškom negativnog naboja. Možemo obavljati niz jednostavnih pokusa. Na primjer, mogli bismo povezati sfere zajedno koristeći špagu. U ovom slučaju bismo se uvjerali da su iznosi naboja na dvije sfere nepromijenjeni. Možemo povezati sfere pomoću bakrene žice. Ustanovili bismo da sfere više nisu nabijene. Daljnjim ispitivanjima se može otkriti da je naboj morao *teći* kroz žicu, iz jedne sfere u drugu, tako da je pozitivan naboj na prvom sferi potpuno prekinuti negativni naboj na drugi, ostavljajući nula naboja na obje sfere. Tvari se mogu klasificirati u dvije glavne skupine, ovisno o tome da li omogućavaju prijenos električnog naboja. em Vodiči omogućuju gotovo slobodan prijenos naboja kroz njih, dok em izolatori ne. Očito špaga je izolator, a bakar je vodič. Kao opće pravilo vrijedi da su tvari dobri vodiči topline također dobri vodiči električne struje. Dakle, svi metali su vodiči, dok su zrak, (čista) voda, plastika, čaše, i keramike izolatori¹.

Metali su dobri vodiči (topline i elektriciteta), jer je barem jedan elektron po atomu *slobodan* - nije vezan za pojedini atom, već se može gotovo slobodno kretati kroz metal. U dobrim izolatorima, poput stakla, svi elektroni su čvrsto vezani za atome (koji su nepokretni u čvrstoj tvari), pa ne postoje slobodni elektroni - nositelji električne struje.

¹Razliku vodiča i izolatora prvi je prema povijesnim podacima uveo engleski znanstvenik Stephen Gray 1729. god.

4.3 Coulombov zakon

Prvo precizno mjerenje sile između dva električnih naboja obavlja francuski znanstvenik Charles-Augustin de Coulomb u 1788. Coulomb je zaključio da:

Električna sila između dva naboja u mirovanju je izravno proporcionalna umnošku, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti.

Ovaj zakon danas poznamo kao *Coulombov zakon*.

Inače, električna sila koja djeluju između dva stacionarna naboja je poznata kao *em elektrostatska sila*. U algebarska obliku, Coulombov zakon je dan s:

$$f = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.1)$$

gdje je f iznos sile, q i q' su iznosi dva naboja (uz odgovarajuće predznake), a r je udaljenost. Sila je odbojna ako je $f > 0$, a privlačna ako je $f < 0$. Univerzalna konstanta

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \quad (3.2)$$

se naziva *permitivnost vakuuma* ili *permitivnost praznog prostora*. Coulombov zakon možemo pisati i u obliku

$$f = k_e \frac{q q'}{r^2},$$

gdje konstanta $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$ ima vrijednost

$$k_e = 8.988 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (3.3)$$

Coulombov zakon ima isti oblik kao i Newtonov opći zakon gravitacije,

$$f = -G \frac{m m'}{r^2},$$

uz analogiju da naboji imaju ulogu masa. Osnovna razlika je u tome da je gravitacijska sila uvijek privlačna (ne postoji tvar negativne mase). Sljedeća važna razlika je

kvantitativne prirode. Jakosti ove dvije sile su veoma različite. Elektrostatsko odbijanje dva elektrona je približno 10^{42} puta veće od gravitacijskog privlačenja. Ova činjenica osigurava dominantnu ulogu elektromagnetskog međudjelovanja na kemijske značajke u tvarima.

Elektrostatska sila \mathbf{f}_{ab} naboja q_a na drugi naboj q_b , postavljen na udaljenosti r od prvog naboja iznosi

$$f = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

i smjera je *radijalno* (duž linije koju zadaju položaji dva naboja) od prvog naboja ako je $f > 0$, i *radijalno* prema njemu ako je $f < 0$. Sila \mathbf{f}_{ba} drugog naboja na prvi je istog iznosa i suprotnog smjera \mathbf{f}_{ab} , tako da vrijedi

$$\mathbf{f}_{ba} = -\mathbf{f}_{ab},$$

u skladu s Newtonovim 3. zakonom gibanja.

Pretpostavimo da su prisutna tri naboja, q_a , q_b , i q_c . Pokazuje se da su elektrostatske sile *superponirajuće*. Dakle, sila \mathbf{f}_{ba} kojom q_b djeluje na q_a ne ovisi o prisutnosti naboja q_c . Na isti način sila \mathbf{f}_{ca} kojom q_c djeluje na q_a ne ovisi o prisutnosti q_b . Iz ove značajke elektrostatske sile slijedi da je sila kojom \mathbf{f}_a djeluje na q_a *rezultanta* te dvije sile:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_{ba} + \mathbf{f}_{ca}.$$

Opisana značajka elektrostatske sile se može poopćiti na sisteme bilo kojeg broja čestica.

4.4 Električno polje

Prema opisanom Coulombovom zakonu, naboj q djeluje određenom silom na neki drugi naboj q' , i *obratno* čak i u vakuumu. Postavlja se pitanje - na koji se način sila prenosi kroz prazan prostor? Kao odgovor na ovo pitanje, fizičari su u 19. stoljeću razvili koncept *električnog polja*. Ova ideja se može shvatiti na sljedeći način naboj q stvara električno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ koje mijenja kvalitetu prostora. Elektrostatska sila koju osjeća naboj q' je lokalni učinak električnog polja \mathbf{E} na mjestu gdje se nalazi naboj, u skladu

s Coulombovim zakonom. Na isti način naboj q' generira vlastito električno polje $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ koje također mijenja kvalitetu prostora. Jednaka i suprotna po smjeru sila djeluje na naboj q je uzrokovana lokalno poljem \mathbf{E}' na mjestu gdje se nalazi taj naboj, opet u skladu s Coulombovim zakonom. Električno polje ne može djelovati na elementarni naboj koji ga uzrokuje na isti način kao što nije moguće prihvatiti jednom rukom drugu ruku, povući i podignuti cijelo tijelo. Usput, daljnja istraživanja su pokazala da električno polje zaista ima fizikalnu realnost i nije samo teorijski alat koji nam pomaže izbjeći međudjelovanje bez posrednika na daljinu. Fizičari su danas sigurni u realnost polja jer se pokazuje da je s njima povezana *energija* s kojom je moguće obaviti konverziju u toplinu ili rad.

Električno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ je vektor koji je uzrokovan prisutnošću statično raspoređenih naboja, a definiran je na sljedeći način: Ako je $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ elektrostatska sila koju osjeća ispitni naboj q' smješten u točki određenoj vektorom \mathbf{r} tada je električno polje u toj točki sila podijeljena s iznosom ispitnog naboja. Matematički iskaz ove definicije je:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q'}$$

Električno polje ima dimenziju sile po jedinici naboja i mjeri se u Newtonima po coulombu (N C^{-1}). Za ispitni naboj se uzima da je malog iznosa da bismo mogli održati pretpostavku o nesmetanju rasporeda naboja koji su izvor polja koje mjerimo.

Pokušajmo sada zahvaljujući iznesenim pravilima odrediti električno polje naboja q . Prema Coulombovu zakonu elektrostatska sila naboja q na pozitivni ispitni naboj q' , postavljen na udaljenost r ima iznos:

$$f = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

i usmjerena je radijalno od naboja ukoliko je $q > 0$, ili radijalno prema njemu ako je $q < 0$. Prema tome električno polje na udaljenosti r od naboja q iznosi

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

pri čemu smjer prati iste odnose ovisno o predznaku naboja q . Električno polje ne ovisi o ispitnom naboju.

Prema gore navedenom slijedi da je elektrostatska sila na naboj q koji se nalazi u točki prostora gdje je električno polje \mathbf{E} izložen elektrostatskoj sili

$$\mathbf{f} = q \mathbf{E}, \quad (4.1)$$

(ne uzimajući u obzir električno polje samog naboja q).

Izravna posljedica valjanosti načela superpozicije za elektrostatsku silu je da isto vrijedi i za električno polje. Ako imamo tri nepomična točkasta naboja, q_a , q_b , i q_c , koji se nalaze na tri različite točke u prostoru ukupno električno polje u odabranoj točki prostora je jednostavno vektorski zbroj električnih polja naboja koja su dobiveni uzimajući u obzir svaki naboj kao da ostalih nema.

4.5 Električno polje i naboji

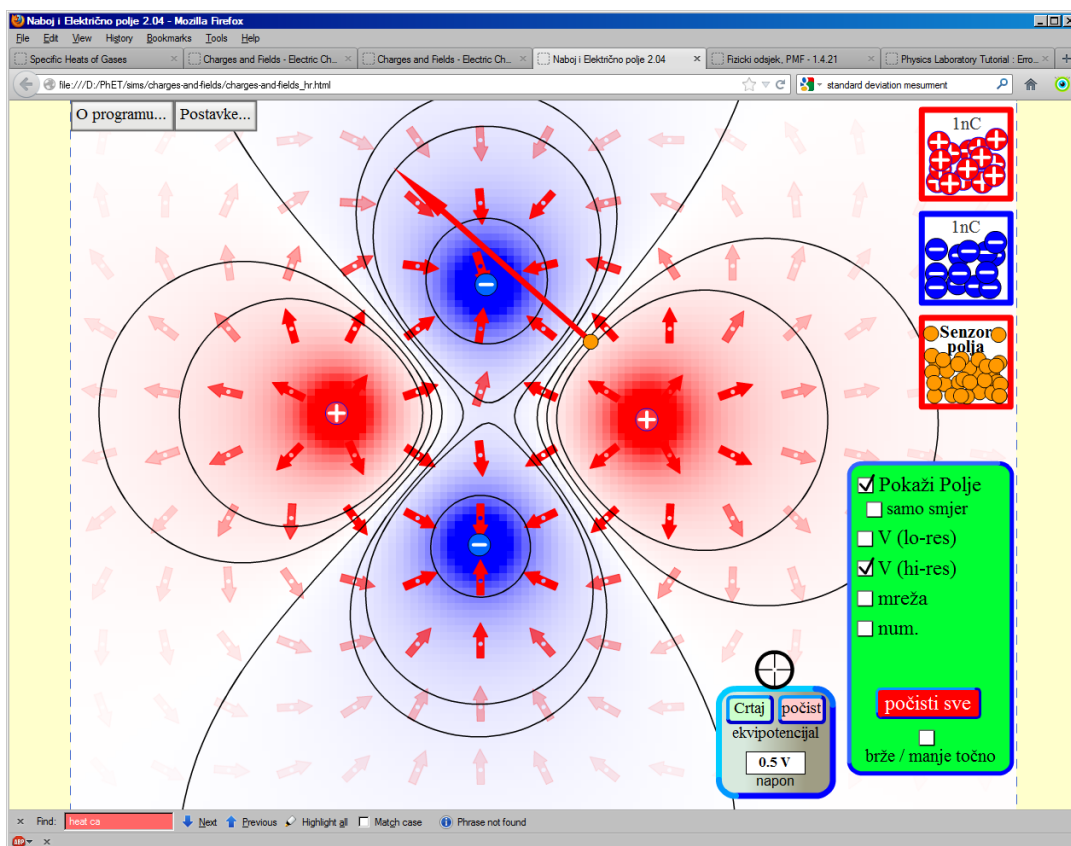
U ovom kompjutorskom eksperimentu, dostupnom u najnovijoj inačici preko <http://phet.colorado.edu/en/simulation/charges-and-fields>, promatramo naboje, električno polje i potencijal. Očekivani ishodi učenja nakon uspješno provedenih aktivnosti na ovoj vježbi su

- analizirati ovisnost električnog polja kao vektora ovisno o proizvoljnoj raspodjeli naboja
- objasniti načelo superponiranja
- ocijeniti izgleda ekvipotencijalnih linija
- analizirati utjecaj prostornog rasporeda i predznaka naboja i električnog polja ili potencijala

Jedan od ciljeva vježbe je detaljno se upoznati s jednadžbama koje su izvedene u prethodnim odjeljcima za računanje polja i sila.

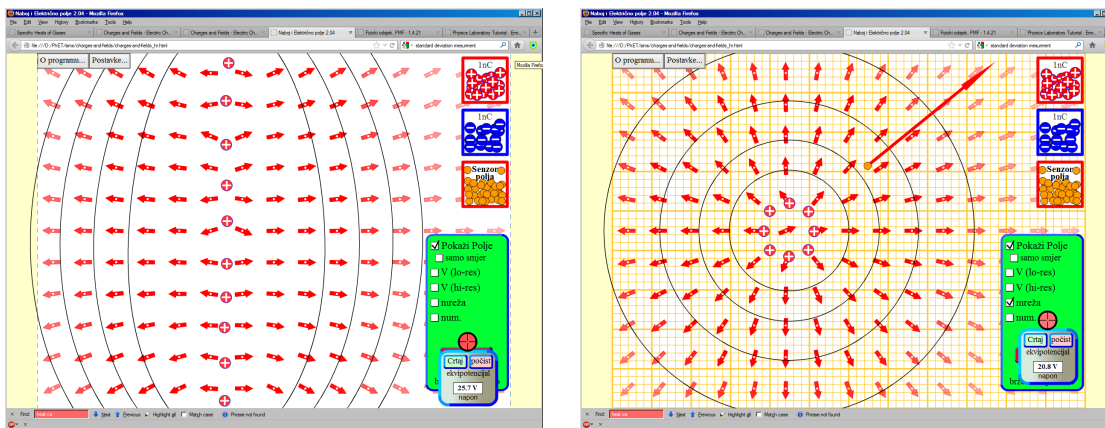
Postupak je sljedeći

- pokrenite PhET aplikaciju proučavanje naboja i polja s poveznicom na simulaciju



Slika 5.1: Prikaz aplikacije "Naboji i polja" koja prikazuje električno polje (crvene strelice, intenzitet boje opisuje jakost polja) i ekvipotencijalne linije (crne zatvorene) za četiri naboja pri čemu je sistem ukupno neutralan.

- Kao prvu aktivnost predlaže se analiza polja i potencijala jednog naboja.
 1. Postavite senzor polja u prostor.
 2. Dodajte jedan pozitivni naboj.
 3. Pomičite senzor polja i promatrajte vektorsku prirodu električnog polja.
 4. Ponovite postupak s negativnim nabojem.
- Druga aktivnost je proučavanje električnog polja i potencijala različitih raspodjela naboja. Pokušajte reproducirati sisteme prikazane na slici 5.2.
- Sada postavite sistem koji se sastoji od samo dva naboja suprotnog predznaka. Ova konfiguracija se naziva električni dipol i ima veliku važnost u proučavanju električnih svojstava materijala.



(a) Pravac.

(b) Kružnica.

Slika 5.2: (a) Prikaz električnog polja i ekvipotencijalnih ploha za naboje postavljene na pravac. (b) Prikaz električnog polja i ekvipotencijalnih ploha za naboje postavljenih kružno.

- Proučite raspored prikazan na slici 5.1. Postavite senzor polja u prostor i pomičite ga kroz sve dijelove i opišite svoja zapažanja.

4.6 Rešeni primjeri

Primjer 4.1 (Elektrostatska sila tri kolinearna naboja). Čestica naboja $q_1 = +6.0 \mu\text{C}$ se nalazi na x -osi, pozicija $x_1 = 5.1 \text{ cm}$. Drugi naboj iznosa $q_2 = -5.0 \mu\text{C}$ nalazi se na x -osi na $x_2 = -3.4 \text{ cm}$. Odredite vektor ukupne elektrostatske sile koja djeluje na treću česticu naboja $q_3 = +2.0 \mu\text{C}$ postavljenu u ishodište ($x = 0$)?

Rješenje Sila f između naboja 1 i 3 je dana s

$$f = k_e \frac{q_1 q_3}{x_1^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(6 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}{(5.1 \times 10^{-2})^2} = +41.68 \text{ N.}$$

Kako je $f > 0$, sila je odbojna. To znači da je sila f_{13} kojom naboj 1 djeluje na naboj 3 usmjerena prema $-x$ -osi (od naboja 1 prema naboju 3), iznosa $|f|$. Prema navedenom, $f_{13} = -41.69 \text{ N}$. Ovdje koristimo konvenciju da je sila usmjerena duž $+x$ -osi pozitivna i obratno. Sila f' između naboja 2 i 3 je dana s

$$f' = k_e \frac{q_2 q_3}{|x_2|^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(-5 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}{(3.4 \times 10^{-2})^2} = -77.75 \text{ N.}$$

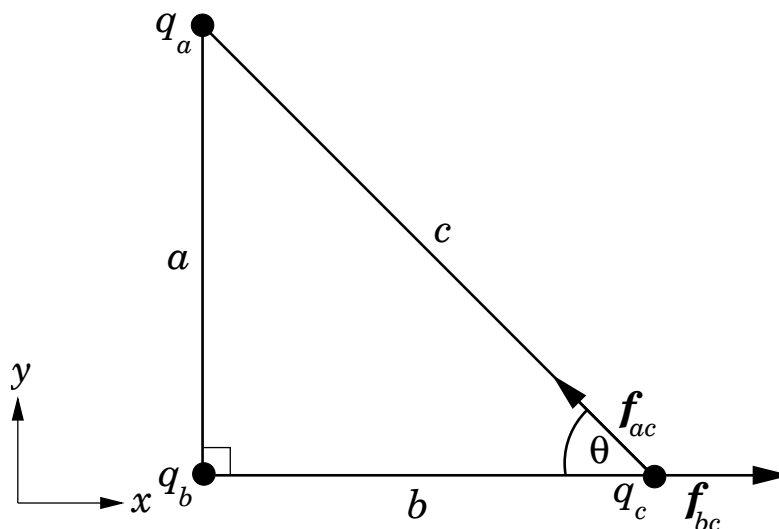
Kako je $f' < 0$, sila je privlačna. Iz ovoga slijedi da je sila f_{23} kojom naboj 2 djeluje na naboj 3 usmjerena duž $-x$ -osi (od naboja 3 prema naboju 2) i ima iznos $|f'|$. Konačno možemo dobiti: $f_{23} = -77.75 \text{ N}$.

Rezultantna sila f_3 na naboj 3 je algebarski zbroj sila naboja 1 i 2 posebno (zbroj je algebarski jer su sve sile na istoj x -osi). Konačno slijedi

$$f_3 = f_{13} + f_{23} = -41.69 - 77.75 = -119.22 \text{ N}.$$

Ukupna sila koja djeluje na naboj q_3 je 119.22 N , a smjer joj je duž $-x$ -osi (dakle $f_3 < 0$). ◀

Primjer 4.2 (Elektrostatska sila između tri nekolinearno postavljena naboja). Neka su dana tri naboja, q_a , q_b , i q_c koja su postavljena u vrhove pravokutnog trokuta, kao što je prikazano na dijagramu slika 6.1. Odredite vektor elektrostatske sile koji djeluje na treći naboj, ako je zadano: $q_a = -6.0 \mu\text{C}$, $q_b = +4.0 \mu\text{C}$, $q_c = +2.0 \mu\text{C}$, $a = 4.0 \text{ m}$, i $b = 3.0 \text{ m}$?



Slika 6.1: Sile na naboj q_c .

Rješenje Iznos f_{ac} sile f_{ac} naboja q_a na naboj q_c je

$$f_{ac} = k_e \frac{|q_a| q_c}{c^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(6 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}{(4^2 + 3^2)} = 4.31 \times 10^{-3} \text{ N},$$

pri čemu je korišten Pitagorin poučak za točno određivanje geometrijskih odnosa u ravnini. Sila je pozitivna (jer su naboji q_a i q_c suprotnog predznaka). Zaključujemo da je sila usmjerena od naboja q_c prema naboju q_a kako je prikazano na dijagramu 6.1. Iznos sile f_{bc} od \mathbf{f}_{bc} koju uzrokuje naboj q_b na naboj q_c je dan s:

$$f_{bc} = k_e \frac{q_b q_c}{b^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(4 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-6})}{(3^2)} = 7.99 \times 10^{-3} \text{ N.}$$

Sila je odbojna jer su naboji q_b i q_c istog predznaka. Sila je usmjerena od naboja q_b prema naboju q_c kako je prikazano na dijagramu. Ukupna sila na naboj q_c je suma \mathbf{f}_{ac} i \mathbf{f}_{bc} . Dodatna komplikacija u ovom slučaju dolazi zbog činjenice da \mathbf{f}_{ab} i \mathbf{f}_{bc} su vektori usmjereni u *različitim* smjerovima. Stoga ih *nije* korektno zbrajati algebarski. Srećom komponente duž osi x - i y -osi su skalari koje *možemo* zbrajati algebarski. Iz dijagrama je vidljivo da je \mathbf{f}_{bc} usmjerena duž $+x$ -osi. Slijedi

$$\begin{aligned} f_{bcx} &= f_{bc} = 7.99 \times 10^{-3} \text{ N,} \\ f_{bcy} &= 0. \end{aligned}$$

Jasno je da vektor \mathbf{f}_{ac} ostvaruje kut

$$\theta = \tan^{-1}(a/b) = \tan^{-1}(4/3) = 53.1^\circ$$

s $-x$ -osi i kut $90^\circ - \theta$ s $+y$ -osi. Koristeći pravila za projekcije vektora prema osima

$$\begin{aligned} f_{acx} &= -f_{ac} \cos \theta = -(4.31 \times 10^{-3})(0.6) = -2.59 \times 10^{-3} \text{ N,} \\ f_{acy} &= f_{ac} \cos(90^\circ - \theta) = f_{ac} \sin \theta = (4.31 \times 10^{-3})(0.8) = 3.45 \times 10^{-3} \text{ N.} \end{aligned}$$

x - i y -komponente rezultantne sile \mathbf{f}_c na naboj q_c su:

$$\begin{aligned} f_{cx} &= f_{acx} + f_{bcx} = -2.59 \times 10^{-3} + 7.99 \times 10^{-3} = 5.40 \times 10^{-3} \text{ N,} \\ f_{cy} &= f_{acy} + f_{bcy} = 3.45 \times 10^{-3} \text{ N.} \end{aligned}$$

Korištenje Pitagorinog poučka iznos ukupne sile je

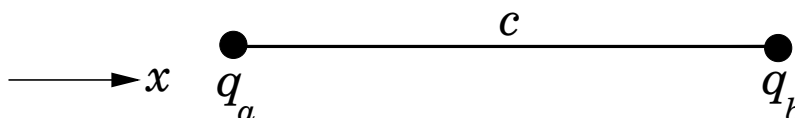
$$f_c = \sqrt{(f_{cx})^2 + (f_{cy})^2} = 6.4 \times 10^{-3} \text{ N.}$$

koja ostvaruje kut

$$\phi = \tan^{-1}(f_{cy}/f_{cx}) = 32.6^\circ$$

s $+x$ -osi i kut $90^\circ - \phi = 57.4^\circ$ s $+y$ -osi. ◀

Primjer 4.3 (Električno polje dva točkasta naboja). Dva naboja, q_a i q_b prikazana na slici 6.2, su na udaljenosti c . Odredite električno polje na sredini između njih? Kolika je sila na treći naboj q_c smješten u toj točki? Uzmimo $q_a = 50 \mu\text{C}$, $q_b = 100 \mu\text{C}$, $q_c = 20 \mu\text{C}$, and $c = 1.00 \text{ m}$.



Slika 6.2: Kolinearni naboji i sile.

Rješenje Postavimo sustav tako da je x -os na pravcu koji prolazi kroz q_a i q_b . Prema Coulombovom zakonu, je elektrostatska sila na bilo koji naboj postavljen na taj pravac paralelna s njim.

Neka su x -koordinata naboja q_a i q_b dane s $-c/2$ i $+c/2$, redom. Uz ovakav odabir sustava ($x = 0$) je točno na polovištu između dva naboja. Električno polje E_a koje uzrokuje naboj q_a u ishodištu je

$$E_a = k_e \frac{q_a}{(c/2)^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(50 \times 10^{-6})}{(0.5)^2} = 1.80 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}.$$

Polje je pozitivno jer je u smjeru $+x$ -osi (od naboja q_a prema ishodištu). Električno polje E_b naboja q_b u ishodištu je

$$E_b = -k_e \frac{q_b}{(c/2)^2} = -(8.988 \times 10^9) \frac{(100 \times 10^{-6})}{(0.5)^2} = -3.60 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}.$$

Polje je negativno jer je usmjereno prema $-x$ -osi (od naboja q_b prema ishodištu). Rezultantna sila E u ishodištu je algebarski zbroj E_a i E_b (jer su polja paralelna s x -osi). Slijedi:

$$E = E_a + E_b = -1.8 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}.$$

Kako je E negativno rezultantna sila je u smjeru $-x$ -osi.

Sila f na naboj q_c postavljen u ishodište je

$$f = q_c E = (20 \times 10^{-6}) (-1.8 \times 10^6) = -36 \text{ N}.$$

Obzirom da je $f < 0$, sila je u smjeru $-x$ -osi. ◀

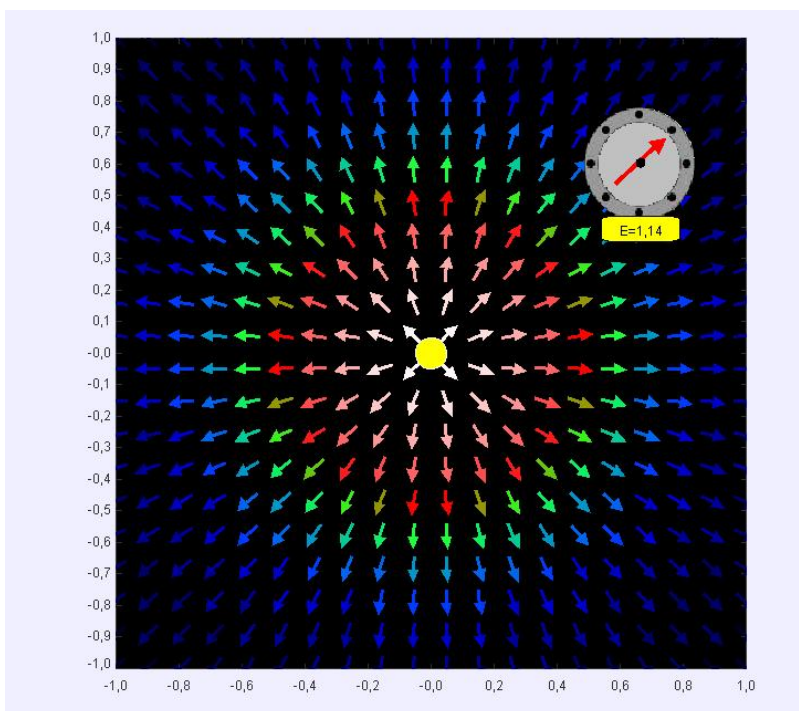
4.7 Gaussov zakon

4.7.1 Silnice električnog polja

Električno polje možemo predstaviti nizom linija sa strelicama *silnice električnog polja*, koje ispunjavaju prostor. Crtamo ih prema sljedećim pravilima:

Smjer električnog polja je svugdje tangentan na silnice u smjeru strelica na njima. Jakost električnog polja je proporcionalna broju linija po jedinici površine koje prolaze kroz "malu" površinu postavljenu okomito na silnice polja.

Prema tome silnice određuju i jakost i smjer električnog polja. Posebno možemo uočiti da je električno polje jako na mjestima gustog rasporeda silnica, a slabo na mjestima gdje su linije relativno više međusobno udaljene.



Slika 7.1: Silnice električnog polja pozitivnog naboja. Boja označava intenzitet polja, a gore desno je prikazan mjerni instrument koji bilježi vektor električnog polja.

Silnice električnog polja povezanoga s *pozitivnim* nabojem je skup neprekidnih, jednoliko raspoređenih po svim smjerovima ravnih linija koje radijalno izviru iz naboja kao na—sl. 7.1. Prema navedenim pravilima slijedi da je i smjer električnog polja radijalan od naboja prema van. Za intenzitet možemo primijetiti da je broj linija po jedinici površine ovisi kao $1/r^2$, gdje je r radijalna udaljenost od naboja. Zaključujemo da električno polje opada s udaljenošću kao $1/r^2$, u skladu s Coulombovim zakonom.

Analogno možemo zaključiti da će u slučaju *negativnog* naboja jedina razlika biti smjer silnica koje će u tom slučaju konvergirati prema naboju.

Kao opće pravilo silnice električnog polja koje stvaraju statični naboji izviru iz pozitivnih, a poniru u negativne naboje. Neprekidne su i nigdje se u prostoru između naboja ne sijeku. Napomenimo da su one geometrijska konstrukcija koja nam pomaže u vizualizaciji ispunjavanja prostora električnim poljem i nisu potrebne kao koncept koji bismo koristili u izračunima.

4.7.2 Gaussov zakon

Jedan od nekolicine najvažnijih rezultata razmatranja elektrostatike nazvan po slavnom Njemačkom matematičaru Karlu Friedrichu Gaussu (1777–1855).

Sadržaj ovog zakona možemo shvatiti proučavajući jednostavan primjer. Pretpostavimo da pozitivan točkasti naboj q stvara električno polje \mathbf{E} . Promotrimo sada sfernu površinu polumjera R u čijem se središtu nalazi naboj q . Okomice na ovu površinu su očito paralelne sa smjerom električnog polja \mathbf{E} jer je polje radijalno u odnosu na naboj. Iznos površine je $4\pi R^2$. Konačno jakost polja na udaljenosti R iznosi $E(R) = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Ukoliko sada pomnožimo površinu i jakost električnog polja dobivamo:

$$E(R) 4\pi R^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (7.1)$$

Primijetite da konačni rezultat *ne ovisi* o polumjeru odabrane sfere. Isti rezultat bismo dobili neovisno o izboru sferne površine. Ovo je bit *Gaussova zakona*.

Možete se zapitati kako to da je dokaz ovako jednostavnog zakona trebao genijalni matematičar. Gauss je dokazao znatno općenitiju tvrdnju, naime, zakon vrijedi za bilo

koju zatvorenu plohu i za bilo kakvu raspodjelu naboja, a to je već netrivialno. Riječima zakon možemo izreći na sljedeći način: ako bilo koju zatvorenu plohu S podijelimo na niz vrlo malih dijelova (prema prostornoj skali promjene električnog polja) te zbrojimo umnoške površine tih dijelova i iznose okomite komponente električnog polja na mjestu ploha dobivamo ukupni naboj obuhvaćen plohom podijeljen s ϵ_0 . Matematičkim jezikom se zakon izražava kao,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (7.2)$$

gdje je S zatvorena ploha, a Q je ukupni naboj koji obuhvaća. Integral predstavlja graničnu vrijednost sume kada broj ploha raste, a njihova se površina smanjuje po volji. To je osnovna ideja integralnoga računa koji je jedna od najvažnijih matematičkih ideja za inženjersku primjenu koja rješava problem kumulacije. Njegovu vrijednost nazivamo *tok električnog polja*, Φ_E , kroz plohu, a proporcionalan je broju silnica električnog polja koje prolaze kroz nju. Konvencija je da se za pozitivnu vrijednost toka uzima slučaj kada je električno polje usmjereno prema van od zatvorene plohe, a negativnu kada je smjer polja prema unutra. Gaussov zakon pišemo kao:

Ukupni tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu je jednak ukupnom naboju koji obuhvaća ploha podijeljenom s ϵ_0 .

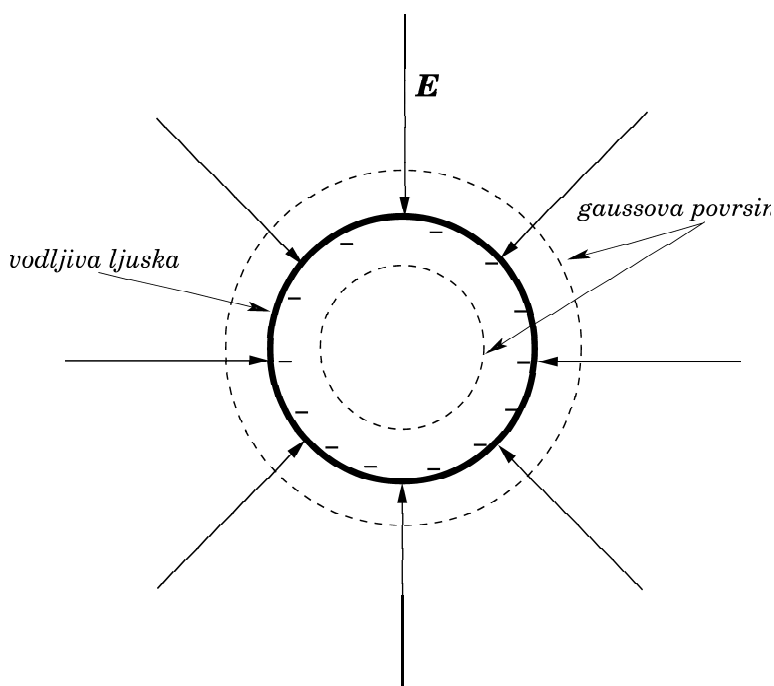
Gaussov zakon je posebno koristan za određivanje električnog polja raspodjela naboja koje imaju neku prostornu simetriju. U sljedećih nekoliko odjeljaka ćemo promotriti nekoliko primjera primjene ovog važnog zakona na takve raspodjele.

4.7.3 Električno polje sferne vodljive ljuske

Pretpostavimo da je naboj $-Q$ raspodijeljen po tankoj vodljivoj sfernoj ljusci. Obzirom da se višak negativnog naboja, kojeg čine elektroni, međusobno odbija očekujemo da će se jednoliko raspodijeliti po površini ljuske. Silnice električnog polja kojeg proizvode tako raspodijeljeni naboji su usmjerene prema tom negativnom naboju i to tako da je električno polje *okomito* na površinu. Prisjetimo se slične analize prikazane na slici 5.2. Razlog je da postojanje komponente električnog polja koja je paralelna s vodljivom povr-

šinom trenutno uzrokuje preraspodjelu naboja koja prestaje kada se uspostavi okomito polje. Slijedi da:

Električno polje uz samu površinu vodiča je u elektrostatici uvijek okomito na površinu.



Slika 7.2: Električno polje negativno nabijene nabijene vodljive sferne ljuske.

Razmotrimo zamišljenu površinu, obično ju nazivamo *gaussova ploha*, sfernog oblika polumjera R tek nešto većeg od polumjera nabijene vodljive sferne ljuske. Kako su silnice električnog polja posvuda okomite na površinu vodiča, Gaussov zakon nam daje:

$$\Phi_E = E A = \frac{-Q}{\epsilon_0},$$

gdje je Φ_E tok električnog polja kroz gaussovu plohu. $A = 4\pi R^2$ je površina plohe, a E je jakost električnog polja na plohi. Primijetite da simetrija raspodjele naboja osigurava da je jakost polja ista na cijeloj gaussovoj plohi. Slijedi da

$$E = \frac{-Q}{\epsilon_0 A} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (7.3)$$

Odmah primjećujemo da je ovaj rezultat isti kao i onaj koji bi se dobio primjenom Coulombova zakona u računu električnog polja točkastog naboja $-Q$ postavljenog u središte sfere. Iznesena argumentacija se jednostavno može proširiti na čitav prostor izvan sfere tako da izraz (7.3)) vrijedi *posvuda* izvan sfere, a R predstavlja radijalnu udaljenost od središta sfere do točke promatranja električnog polja. Zaključujemo da je električno polje izvan nabijene, vodljive sferne ljuske jednako polju iste količine naboja smještenog u njeno središte.

Ako primijenimo Gaussov zakon na prostor unutar sfere tako da zamišljenu plohu postavimo malo ispod nabijene vodljive ljuske vidimo da sada gaussova ploha ne obuhvaća naboj. Zbog simetrije i Gaussova zakona slijedi da je električno polje unutar sfere nula. U stvari električno polje unutar *bilo koje* zatvorenog šupljega vodiča je *nula* (pretpostavljajući da područje koje obuhvaća vodič ne sadrži slobodne naboje).

4.7.4 Električno polje jednoliko nabijene ravne žice

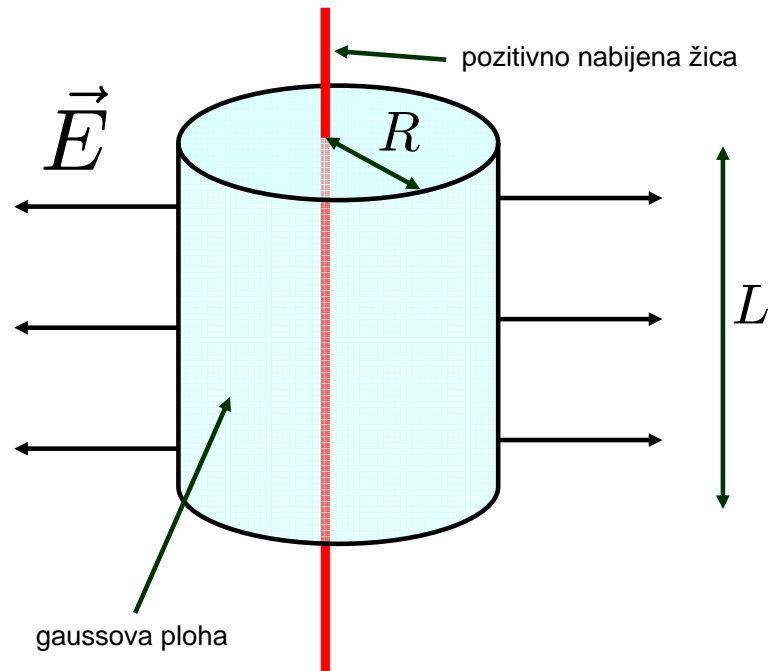
Promotrimo dugu ravnu žicu koja je nabijena jednoliko s nabojem po jedinici duljine λ . Očekujemo na osnovu simetrije raspodjele naboja da će električno polje imati cilindričnu simetriju. Ako pretpostavimo da je žica pozitivno nabijena očekujemo da je polje usmjereno radijalno, u smislu cilindrične simetrije, od žice i okomito na nju. Prisjetimo se slične analize prikazane na slici 5.2.

Kao i u prethodnom slučaju jednoliko nabijene odabiremo gaussovu plohu koja slijedi simetriju raspodjele naboja. Zamislimo cilindričnu gaussovu plohu sa zajedničkom osi simetrije kroz središte kružnog presjeka polumjera R i duljine L kao na slici (7.3). Primijenimo li iste argumente simetrije dobivamo isti rezultat, a to je okomitost električnog polja na gaussovu plohu. Prema Gaussovom zakonu

$$E(R) 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

gdje je $E(R)$ jakost električnog polja udaljen za R od osi žice. Lijeva strana ovog izraza predstavlja tok električnog polja kroz Gaussovu plohu. Desna strana je ukupni naboj obuhvaćen plohom podijeljen s ϵ_0 . Slijedi

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$



Slika 7.3: Električno polje jednoliko nabijene žice.

Električno polje je usmjereno radijalno (u smislu cilindrične simetrije) od žice, ako je $\lambda > 0$ i radijalno prema žici ukoliko je $\lambda < 0$.

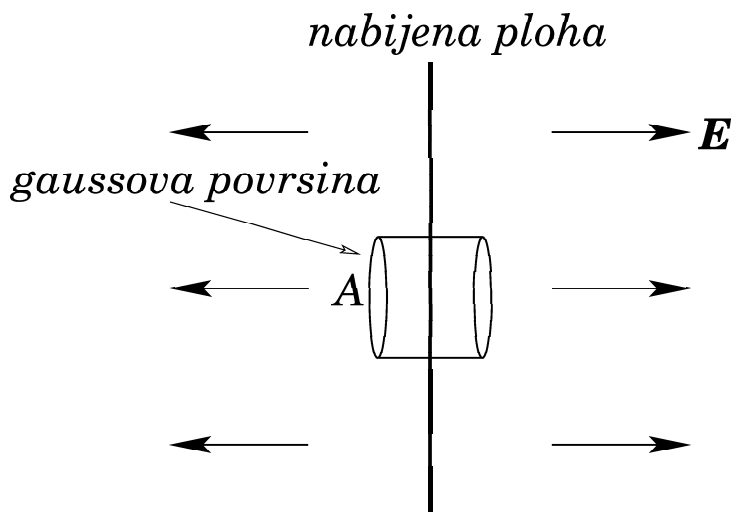
4.7.5 Električno polje jednoliko nabijene ploče

Razmotrimo beskonačnu ravnu ploču s jednoliko raspodijeljenim nabojem gustoće po jedinici površine σ . Neka je ploča postavljena u y - z ravninu (skup točaka za koje je $x = 0$). Simetrijom očekujemo da električno polje na obje strane ovisi samo o vrijednosti x koordinate, okomito na ploču. Smjer je prema ploči, ako je σ negativan i obratno.

Postavimo cilindričnu gaussovu plohu čija je os okomita na ploču, a ravnina ju dijeli na pola. Neka su kružne plohe cilindra na $x = -a$ i $x = +a$, neka je kružni presjek površine A . Gaussov zakon daje

$$2 E(a) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

gdje je $E(a) = -E(-a)$ jakost električnog polja na $x = +a$. Lijeva strana jednadžbe

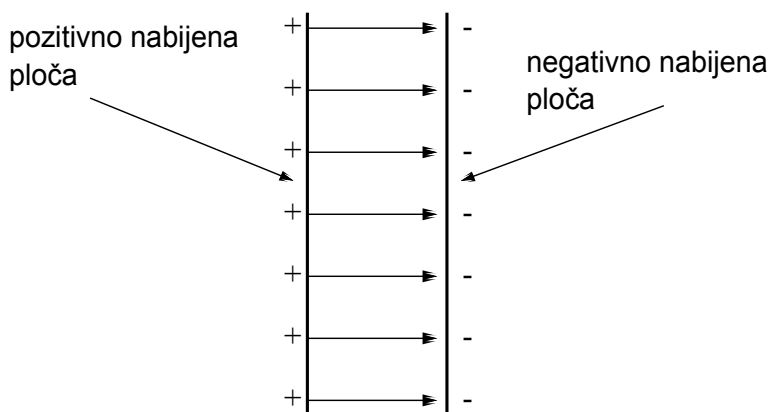


Slika 7.4: Električno polje jednoliko nabijene ploče.

predstavlja tok električnog polja od površine. Primijetite da jedini doprinos toku dolazi od kružnih ploha na krajevima cilindra. Desna strana je obuhvaćeni naboj podijeljen s ϵ_0 . Slijedi

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}. \quad (7.4)$$

Dobili smo možda iznenađujući rezultat, suprotno očekivanju, električno polje nabijene ploče ne ovisi o udaljenosti x . Usmjeren je od ploče u slučaju pozitivno nabijene ploče i obratno.



Slika 7.5: Električno polje dvije suprotno nabijene paralelno postavljene ploče.

Promotrimo sada jedan praktično važan slučaj: dvije paralelne beskonačne ploče suprotno nabijene gustoćom $\pm\sigma$. Ako provedemo istovjetnu analizu kao u slučaju iz-

olirane ploče te superponiranjem dva rješenja dobivamo da je polje uniformno između ploča, okomito na ploče, usmjereno od pozitivne prema negativnoj ploči i jakosti

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (7.5)$$

situacija je predstavljena na slici 7.5. Izvan ploča, i s jedne i s druge strane polje je nula. Važan zaključak je da će ovaj rezultat vrijediti s visokom točnošću u prostoru između ploča konačnih dimenzija koji nije uz rub, ako je udaljenost između ploča puno manja od linearnih dimenzija samih ploča.

4.7.6 Nabijeni vodiči

Pretpostavite da postavimo negativni naboj na proizvoljno oblikovano, čvrsto vodljivo tijelo. Gdje završava višak negativnog naboja nakon što se sistem potpuno uravnoteži i prestane gibanje naboja?

Konstruirajmo gaussovu plohu koja leži malo ispod površine unutar vodiča. Primjena Gaussova zakona daje

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

gdje je Q obuhvaćeni naboj. Kako električno polje unutar vodiča mora biti nula jer se slobodni naboji gibaju unutar vodiča dok u potpunosti ne "uklone" električno polje. Zaključujemo da lijeva strana jednadžbe mora biti nula. No to je moguće samo ako je ukupni obuhvaćeni naboj također nula. Drugim riječima: unutar vodiča nema viška pozitivnog ili negativnog naboja. Umjesto unutrašnjosti višak naboja se prisiljen raspodijeliti po površini vodiča. Slijedi da je

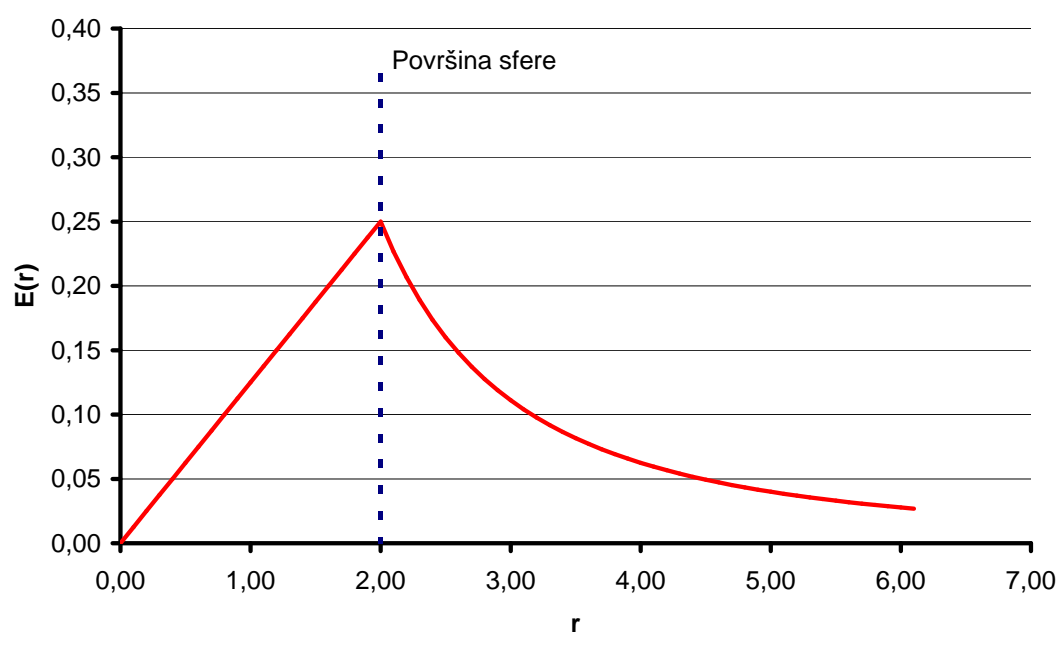
Bilo koji višak naboja na čvrstom vodiču bez rupa se postavlja isključivo na njegovu površinu.

4.7.7 Riješeni primjeri

Primjer 4.4 (Električno polje jednoliko nabijene sfere). Sfera polumjera a od izolacijskog materijala je *jednoliko* nabijena iznosom naboja Q po cijelom volumenu. Iskoristite

Gaussov zakon da odredite električno polje u cijelom prostoru (u i izvan sfere).

Rješenje Iz simetrije raspodjele naboja očekujemo sličnu simetriju kao i u slučaju sferne ljuske: električno polje je radijalno usmjereno od ili prema središtu sfere ovisno o predznaku viška naboja, a iznos mu ovisi samo o udaljenosti od središta sfere.



Slika 7.6: Električno polje jednoliko nabijene nevodljive sfere. Okomita isprekidana linija predstavlja rub sfere.

Promotrimo gaussovu površinu sfernog oblika polumjera r koja ima zajedničko središte s nabijenom. Gaussov zakon nam daje

$$A(r) E_r(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0},$$

gdje $A(r) = 4\pi r^2$ predstavlja površinu plohe, $E_r(r)$ je jakost električnog polja na udaljenosti r , a $q(r)$ ukupni naboj obuhvaćen plohom. Lako je provjeriti da imamo

$$q(r) = \begin{cases} Q & r \geq a \\ Q (r/a)^3 & r < a \end{cases}.$$

Prema tome vrijedi,

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq a \\ \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 a^3} & r < a \end{cases}.$$

Jakost električnog polja prema najavi ovisi o radijalnoj udaljenosti r od središta sfere. Unutar sfere raste proporcionalno s r , a izvan sfere opada s kvadratom udaljenosti, dakle kao $1/r^2$. Rezultat je prikazan na slici 7.6. ◀

Dodatak A

Praktična dopuna

A.1 Pregled osnovnih vještina u fizici

Jednostavne aritmetičke operacija Potrebno je da ste uspješni u računanju bez pomoći aparata. Pogledajmo primjer

Decimalna mjesta Budite pažljivi sa značajnim brojem decimalnih mjesta. Pogledajmo nekoliko primjera:

$$(44.2) \cdot (9.7) = 428.74 = 430 \quad 32.21 - 5.1 = 27.11 = 27.1$$
$$(44.2) \cdot (9.7) = 428.74 = 430 \quad 32.21 - 5.1 = 27.11 = 27.1$$

U ovim primjerima, prvi znak jednakosti je čisto matematički rezultat "nesvjestan" postojanja točnosti poznavanja vrijednosti fizičke veličine. Drugi znak jednakosti uvažava fizički smisao brojeva i njegovu povezanost s realnim eksperimentalnim rezultatom. Konvencija je da posljednja navedena znamenka u decimalnom broju nije sigurno poznata.

Znanstvena notacija U znanstvenim i inženjerskim primjenama nije rijetko da je potrebno računati s brojevima koji se razlikuju za velike iznose, redove veličina kako se to obično naziva. Ispravna organizacija izračuna je u tim slučajevima presudna za izbjegavanje pogrešaka, a praktičnije je koristiti notaciju s potencijama broja 10. Pogledajmo na dva primjera tehniku koja se preporučuje:

$$5.00 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4} = 5.4 \times 10^{-3}$$

$$(5.00 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-4}) = 2 \times 10^{-6}$$

Dimenzijska analiza Fizičke veličine se obično izražavaju u određenim mjernim jedinicama. Ova se činjenica može iskoristiti da se izravno otkrije skrivena veza među veličinama, bez izravnog poznavanja mehanizma. Pogledajmo kao primjer silu otpora gibanju kuglice u fluidu tijekom sporog gibanja koja dolazi od unutrašnjeg trenja između slojeva opisanog koeficijentom viskoznosti ν . Ova sila će sigurno ovisiti, pored ν i o brzini gibanja kuglice v te karakterističnoj dimenziji kuglice - promjeru d . Drugih veličina nema, a ako i ima sam postupak će nam pokazati jer nećemo moći izvest relaciju.

Dakle s navedenim veličinama izraz mora imati opći oblik:

$$f_{\text{visk}} = D\nu^m v^n d^k$$

gdje nam m , n i k predstavljaju nepoznate potencije, a D je nepoznata bezdimenzionalna veličina koja ovisi o obliku tijela. Navedena relacija zapisana s pomoću mjernih jedinica (masa M , duljina L i vrijeme T) ima oblik:

$$\begin{aligned} MLT^{-2} &= (M/LT)^m (L/T)^n (L)^k = M^m L^{-m} T^{-m} L^n T^{-n} L^k \\ &= M^m L^{-m+n+k} T^{-m-n} \end{aligned}$$

korištenjem matematičkog pravila da lijeva i desna strana mogu biti jednake samo ako su sve potencije iste daje sljedeći skup jednadžbi

$$1 = m, \quad 1 = -m + n + k, \quad 2 = -m - n$$

koje je vrlo jednostavno riješiti. Rezultat je sljedeći skup vrijednosti:

$$m = n = k = 1$$

Zaključujemo da je viskozno trenje pri gibanju kuglice dano sljedećim izrazom

$$f_{\text{visk}} = D\nu v d$$

Ostaje nam odrediti broj D koji nam ovakva analiza ne može dati. Prva standardna opcija je eksperimentalno određivanje koje stoji na raspolaganju za sve oblike. Sjajni irski fizičar Sir George G. Stokes (1819.-1903.) uspio je odrediti ovu veličinu teorijski $D = 3\pi$.

Red veličine Fizičke veličine poprimaju vrijednosti zbog dubokih fizikalnih razloga. Ocjena neke veličine preko reda veličine je metoda s kojom se razlog postaje vidljiv. Pokušajom ocijeniti masu Zemlje ako poznamo sljedeće veličine: gravitacijsko ubrzanje $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, gravitacijsku konstantu $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ N (m/kg)}^2$ i polumjer Zemlje $R = 6,371.0 \text{ km}$. Newton opći zakon gravitacije nam daje traženu ocjenu tako da uvrstimo vrijednosti zaokružene na potencije broja 10:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{10 \cdot 10^{2 \times 7}}{10^{-10}} \left[\frac{\text{m s}^{-2} \text{ m}^2}{\text{m s}^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}} \right] = 10^{25} \text{ kg}$$

Na ovaj način, bez korištenja kalkulatora, jednostavnom algebrom smo odredili skalu fizičke veličine o kojoj je nemoguće imati intuitivnu ocjenu zasnovanu na našem neposrednom iskustvu. Ovakvi računi nam jasno ukazuju zašto neka veličina ima određenu vrijednost.

Čitajte jednadžbe Vrlo korisna tehnika učenja fizike je doslovno čitanje i razumijevanje jednadžbi na hrvatskom jeziku.

Pogledajmo primjer Coulombova zakona (3.1) koji glasi

$$f = k_e \frac{q q'}{r^2}$$

iz čega se možemo uvjeriti da je

Prvo Udvostručenje bilo kojeg od naboja udvostručit će iznos sile.

Drugo Udvostručenje udaljenosti između naboja smanjit će iznos sile $4 \times$.

Treće Promjena predznaka naboja mijenja predznak sile.

Kao što vidite izgovarajući vezu između veličina možemo osvijestiti niz činjenica i stvarni sadržaj matematičkih izraza koji kvantitativno opisuju prirodne fenomene. Vrlo je važno da možete bez napora sebi artikulirati preciznim rečenicama matematički i fizikalni sadržaj osnovnih jednadžbi. U principu je ova tehnika lakša nego što se možda čini jer je ova vježba sve lakša opetovanom primjenom na nove izraze.

Bibliografija

- [Cin88] Nikola Cindro, *Fizika 2*, Školska knjiga, 1988. [8]
- [Fit07] Richard Fitzpatrick, *Electromagnetism and optics*, The University of Texas at Austin, 2007. [10]
- [Jay98] E. T. Jaynes, *The second law as physical fact and as human inference*, 1998. [49]
- [Kul95] Petar Kulišić, *Mehanika i toplina*, 7. ed., Školska knjiga, 1995. [8, 78]
- [Leb93] Joel L. Lebowitz, *Boltzmann's entropy and time's arrow*, *Physics Today* **46** (1993), no. 9, 32–38. [49]
- [LY00] Elliott H. Lieb and Jakob Yngvason, *A fresh look at entropy and the second law of thermodynamics*, *Physics Today* **53** (2000), no. 4, 32–37. [49]
- [Max78] J. Clerk Maxwell, *Tait's "thermodynamics"*, *Nature* **17** (1878), no. 432, 278–280. [49]
- [Sun11] D. K. Sunko, *Statistička fizika i termodinamika*, 2011. [10]
- [Tim10] Todd Timberlake, *The statistical interpretation of entropy: An activity*, *The Physics Teacher* **48** (2010), no. 8, 516–519. [51]
- [YP75] B.M. Yavorsky and A.A. Pinsky, *Fundamentals of physics: Vol. 1. motion and forces. conservation laws. molecular-kinetic theory of gases. molecular forces and states of...*, Mir, 1975. [10]

Indeks

- barometarska formula, 80
- Coulombov zakon, 97
- dimenzijska analiza, 118
- ekstenzivnost, 60
- elastični medij
 - istezanje štapa, 74
 - val, 84
- električna sila
 - superponiranje, 98
- električno polje
 - superponiranje, 100
- entalpija, 66
- entropija
 - Boltzmannov izraz, 52, 61
 - Clausiusova formulacija, 60
 - toplina, 63
- Gaussov zakon, 108
- ireverzibilni proces, 48
- ireverzibilnost, 46
- kvazistatični proces, 47
- PhET simulacije, 8
- red veličine, 118
- reverzibilni proces, 48
- Silnice električnog polja, 106
- suhi led, 44
- temperatura
 - fenomenologija, 15
 - skale, 14
- termalizacija, 15, 74
- termalna energija, 13
- termička ravnoteža, 15
- termodinamička vjerojatnost, 52, 55, 61
- termodinamičke varijable
 - elastični medij, 74
 - fluidi, 77
 - jednadžba stanja, 27
 - ravnoteža, 73
- termodinamički potencijal, 66
- termometar, 15
- termometrija, 13
- Toriccelijev zakon, 91
- Valna fronta, 84
- Venturijeva cijev, 92
- zakoni termodinamike
 - drugi, 46, 65
 - nulti, 15
 - prvi, 34, 66
- zvuk
 - brzina, 87
 - val, 85